PROBABILIDAD Y APLICACIONES ESTADÍSTICAS

Edición revisada

Paul L. Meyer
Washington State University

U. A. M. IZTAPALAPA

Versión en español

Carlos Prado Campos
Universidad Católica de Chile

Con la colaboración de

Germán Ardila Cuéllar
Universidad Nacional de Colombia

Edición revisada y corregida por

Sergio Octavio Esparza
Instituto Politécnico Nacional, México

y

Raúl Montes de Oca M.
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Iztapalapa, México

ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA
Argentina • Brasil • Chile • Colombia • Ecuador • España
Estados Unidos • México • Perú • Puerto Rico • Venezuela

Versión en español de la segunda edición de la obra *Introductory Probability and Statistical Applications*, de Paul L. Meyer, publicada originalmente en inglés por Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, E.U.A. ©1970.

Esta edición en español es la única autorizada

175991

Diseño de portada: Armando Jiménez

© 1973 por **Fondo Educativo Interamericano**

© 1986, 1992 por **ADDISON–WESLEY IBEROAMERICANA, S. A.**
Wilmington, Delaware, E.U.A.

Impreso en los Estados Unidos. *Printed in the U.S.A.*

ISBN 0-201-51877-5
4 5 6 7 8 9 10-CRS-97 96 95 94

Prólogo a la edición en español

El creciente empleo de la estadística en diversas áreas del conocimiento hace cada vez más imperiosa la necesidad de contar con textos adecuados para iniciar el estudio de esta disciplina. En consecuencia, creo que la traducción de esta obra del profesor Paul Meyer vendrá a satisfacer dicha demanda entre los estudiantes de habla hispana. Mi experiencia pedagógica en escuelas de ingeniería y de matemáticas con estudiantes que por primera vez toman un curso de estadística me indica que este texto, que contiene una gran variedad de problemas aplicados de actualidad, muchos ejemplos desarrollados y comentarios útiles acerca de los aspectos teóricos de la materia, es fundamental para la comprensión de un curso de esta naturaleza.

Santiago de Chile
1973

CARLOS PRADO CAMPOS

175991

Prólogo a la edición revisada

La calurosa acogida que recibió la edición en español de esta obra nos impulsó a mejorarla en diversos aspectos. Nos dimos pues a la tarea de revisar el texto nuevamente y corregir las erratas de la edición previa. Durante esta labor contamos con el apoyo incondicional del Dr. Sergio Octavio Esparza, del Instituto Politécnico Nacional, México, y del M. en C. Raúl Montes de Oca M., de la Universidad Autónoma Metropolitana, unidad Iztapalapa, México, a quienes agradecemos su valiosa colaboración.

Deseamos manifestar también que la presente edición es un homenaje póstumo a nuestro autor, el Dr. Paul L. Meyer.

México, 1992

ADDISON – WESLEY
IBEROAMERICANA

Prefacio a la primera edición

Este texto está destinado para un curso de un semestre o para dos cursos trimestrales de introducción a la teoría de la probabilidad y algunas de sus aplicaciones. El prerrequisito es un año de cálculo diferencial e integral. No se supone conocimiento previo de probabilidad o estadística. En la Washington State University, el curso para el cual se desarrolló este texto ha sido impartido durante varios años, principalmente a estudiantes que se especializarán en ingeniería o en ciencias naturales. La mayoría de ellos sólo pueden dedicar un semestre al estudio de esta materia. Sin embargo, como ya están familiarizados con el cálculo, pueden empezar dicho estudio más allá del nivel estrictamente elemental.

Muchos temas matemáticos pueden presentarse en diversos grados de dificultad, y esto es especialmente en probabilidad. En este texto se pretende aprovechar la ventaja que suponen los conocimientos matemáticos del lector, sin sobrepasarlos. En él se usa un lenguaje matemático preciso, pero se tiene cuidado de no profundizar demasiado en detalles matemáticos innecesarios. Éste no es ciertamente un "libro de cocina". Aunque se presentan y exponen varios conceptos de manera informal, las definiciones y los teoremas se enuncian con cuidado. Si no es posible o deseable la demostración detallada de un teorema, al menos se da un bosquejo de las ideas más importantes. Una de las características distintivas de este texto son las "Observaciones" que siguen a la mayoría de los teoremas y definiciones; en ellas, el resultado particular o el concepto presentado se examinan desde un punto de vista intuitivo.

Debido a la restricción autoimpuesta de escribir un texto relativamente breve sobre una materia que abarca una extensa área, hubo necesidad de hacer una selección para incluir o excluir ciertos temas. Parece ser que no hay manera obvia de resolver este problema. Ciertamente, no sostengo que para algunos de los temas excluidos no se podría haber encontrado sitio, ni pretendo que no haya alguna parte que se pudiera haber omitido. Sin embargo, en gran parte se ha hecho hincapié en las nociones fundamentales, presentándolas con detalle considerable. Sólo el capítulo II, sobre confiabilidad, puede considerarse "artículo de lujo"; pero, aun aquí, creo que las nociones asociadas con problemas de confiabilidad son de interés para muchas personas. Además, los con-

ceptos de confiabilidad son un medio excelente para ilustrar muchas de las ideas presentadas antes que ellos en el libro.

Aun si se piensa que la extensión ha sido limitada por el tiempo disponible, se ha logrado una selección amplia y razonable de temas. Una ojeada al índice general muestra de manera evidente que unas tres cuartas partes del texto trata de temas probabilísticos, mientras la cuarta parte restante está dedicada a una exposición de inferencia estadística. Aunque no hay nada de extraordinario en esta división particular del énfasis entre probabilidad y estadística, creo que un conocimiento profundo de los principios básicos de la probabilidad es imperativo para una comprensión adecuada de los métodos estadísticos. Idealmente, a un curso en probabilidad debería seguir otro en teoría estadística y metodología; sin embargo, como se indicó antes, la mayoría de los estudiantes que toman este curso no tienen tiempo para dos semestres de exposición de estas materias y, por tanto, me sentí obligado a exponer al menos algunos de los aspectos más importantes en el área general de la inferencia estadística.

El éxito potencial de una presentación particular de la materia no debería juzgarse solamente en función de las ideas específicas aprendidas y de las técnicas específicas adquiridas; el juicio final también debe tener en cuenta si el estudiante está bien preparado para continuar estudiando el tema ya sea por sí mismo o por medio de un curso formal adicional. Si se considera que este criterio es importante, se hace evidente que debiera insistirse en los conceptos básicos y en las técnicas fundamentales, relegando al mismo tiempo los métodos y temas muy especializados a un papel secundario. Esto también resultó ser un factor importante en la decisión sobre los temas por incluir.

Es difícil exagerar la importancia de la teoría de la probabilidad. El modelo matemático apropiado para el estudio de un gran número de fenómenos observables es probabilístico en vez de determinista. Además, el tema completo de la inferencia estadística está basado en consideraciones probabilísticas. Las técnicas estadísticas se cuentan entre algunas de las herramientas más importantes de científicos e ingenieros. Para poder utilizar esas técnicas inteligentemente se requiere una profunda comprensión de los conceptos probabilísticos.

Se espera que, además de familiarizarse con muchos métodos y conceptos específicos el lector desarrolle cierto criterio: pensar probabilísticamente sustituyendo preguntas tales como: "¿Durante cuánto tiempo funcionará este mecanismo?" por "¿Cuál es la probabilidad de que este

mecanismo funcione durante más de cien horas?". En muchas situaciones, la segunda pregunta puede no sólo ser la más atinada sino, de hecho, la única pertinente.

Como es ya tradicional, muchos de los conceptos importantes de la probabilidad se han ilustrado con la ayuda de varios "juegos de azar": lanzar monedas o dados, sacar cartas de una baraja, hacer girar una ruleta, etc. Aunque no he evitado por completo referirme a tales juegos, porque sirven para ilustrar bien nociones básicas, he intentado poner en contacto al estudiante con ilustraciones más pertinentes de las aplicaciones de la probabilidad: la emisión de partículas α de una fuente radiactiva, muestreo de lote, la duración de instrumentos electrónicos y los problemas asociados de mecanismos y confiabilidad del sistema, etcétera.

Estoy reacio a mencionar una de las características más obvias en cualquier texto de matemáticas: los problemas; y, sin embargo, es posible que valga la pena señalar que trabajar con problemas debe considerarse parte integrante del curso. Sólo mediante el acto personal de plantear y resolver los ejercicios, es como el estudiante tendrá la posibilidad de desarrollar una comprensión y apreciación de las ideas, así como familiarizarse con las técnicas pertinentes. Es por eso que en el libro se incluyen más de 330 problemas y, al final del texto, figuran las respuestas a más de la mitad de ellos. Además de los problemas para el lector, hay muchos ejemplos resueltos en diferentes partes a lo largo del libro.

Este libro se ha escrito en forma bastante consecutiva: la comprensión de la mayoría de los capítulos requiere familiaridad con los anteriores; sin embargo, es posible tratar superficialmente los capítulos 10 y 11 si se está interesado, en particular, en dedicar más tiempo a las aplicaciones estadísticas examinadas en los capítulos 13 a 15.

Como debe suceder a quienquiera que escribe un texto, debo estar agradecido a muchas personas: a mis colegas, por muchas conversaciones estimulantes y útiles; a mis propios profesores, por el conocimiento del tema y su interés en él; a los revisores de las primeras versiones del manuscrito, por sus muchas sugerencias y críticas útiles; a Addison–Wesley Publishing Company, por su gran ayuda y cooperación desde las primeras etapas de este proyecto hasta su finalización; a la señorita Carol Sloan, por ser una mecanógrafa muy eficiente y activa; a D. Van Nostrand, Inc., The Free Press, Inc. y Macmillan Publishing Company, por su autorización para reproducir las tablas 3, 6 y 1 del apéndice, respectivamente; a McGraw–Hill Book Company, Inc., Oxford University

Press, Inc., Pergamon Press, Ltd. y Prentice–Hall, Inc., por su autorización para incluir ciertos ejemplos en el texto; y, finalmente, a mi esposa, no sólo por la paciencia que mostró durante mi labor, sino también por "dejarme" y llevarse a nuestros dos hijos a visitar a sus abuelos durante dos cruciales meses de verano, en los cuales pude convertir nuestro hogar en un taller desordenado pero tranquilo, del cual emergió milagrosamente, al fin, la última versión de este libro.

Pullman, Washington
Abril, 1965

PAUL L. MEYER

Prefacio a la segunda edición

En vista del considerable número de comentarios favorables que he recibido durante los últimos años tanto de estudiantes como de profesores que han utilizado la primera edición de este libro, se han hecho en él relativamente pocos cambios. Con el uso repetido del texto he encontrado que su organización básica y el nivel general de presentación (como la mezcla de argumentos matemáticos rigurosos con presentaciones y ejemplos más informales) son los más apropiados para el tipo de estudiante que toma este curso.

Sin embargo, se han hecho varios cambios y adiciones. En primer lugar se hizo un esfuerzo para eliminar varias erratas de imprenta y otros errores que aparecieron en la primera edición. El autor está muy agradecido a los numerosos lectores que no sólo descubrieron algunos de ellos, sino que se interesaron lo suficiente como para indicármelos.

En segundo lugar se intentó hacer más claras las relaciones entre varias distribuciones de probabilidades, de modo que el estudiante pueda comprender mejor cómo usar varios modelos probabilísticos para aproximarlos entre sí.

Finalmente, se han añadido nuevos problemas a la ya larga lista incluida en la primera edición.

El autor desea agradecer nuevamente a Addison–Wesley su cooperación en todos los aspectos que condujeron a esta nueva edición.

Pullman, Washington P. L. M.
Diciembre, 1969

Índice General

Capítulo 1 Introducción a la probabilidad 1

1.1 Modelos matemáticos 1
1.2 Introducción a los conjuntos 4
1.3 Ejemplos de experimentos no deterministas 8
1.4 El espacio muestral 10
1.5 Eventos 13
1.6 Frecuencia relativa 15
1.7 Nociones básicas de probabilidad 17
1.8 Varias observaciones 21
Problemas 23

Capítulo 2 Espacios muestrales finitos 27

2.1 El espacio muestral finito 27
2.2 Resultados igualmente probables 28
2.3 Métodos de enumeración 31
Problemas 40

Capítulo 3 Probabilidad condicional e independencia 43

3.1 Probabilidad condicional 43
3.2 Teorema de Bayes 51
3.3 Eventos independientes 54
3.4 Consideraciones esquemáticas; probabilidad condicional e independencia 61
Problemas 63

Capítulo 4 Variables aleatorias unidimensionales 69

4.1 Noción general de una variable aleatoria 69
4.2 Variables aleatorias discretas 76
4.3 La distribución binomial 79
4.4 Variables aleatorias continuas 85
4.5 Función de distribución acumulativa 90
4.6 Distribuciones mixtas 94
4.7 Variables aleatorias distribuidas uniformemente 96
4.8 Una observación 97
Problemas 98

Capítulo 5 Funciones de variables aleatorias 105

5.1 Un ejemplo 105
5.2 Eventos equivalentes 106
5.3 Variables aleatorias discretas 108
5.4 Variables aleatorias continuas 111
Problemas 117

Capítulo 6 Variables aleatorias bidimensionales y de mayor dimensión 121

6.1 Variables aleatorias bidimensionales 121
6.2 Distribuciones de probabilidades marginales y condicionales 128
6.3 Variables aleatorias independientes 134
6.4 Funciones de una variable aleatoria 137
6.5 Distribución del producto y del cociente de variables aleatorias independientes 142
6.6 Variables aleatorias n–dimensionales 145
Problemas 148

Capítulo 7 Otras características de las variables aleatorias 153

7.1 El valor esperado de una variable aleatoria 153
7.2 Esperanza de una función de una variable aleatoria 161
7.3 Variables aleatorias bidimensionales 166
7.4 Propiedades del valor esperado 168
7.5 La varianza de una variable aleatoria 175
7.6 Propiedades de la varianza de una variable aleatoria 179
7.7 Expresiones aproximadas para la esperanza y la varianza 182
7.8 Desigualdad de Chebyshev 186
7.9 El coeficiente de correlación 189
7.10 Esperanza condicional 194
7.11 Regresión del promedio 197
Problemas 202

Capítulo 8 La variable aleatoria de Poisson y otras variables aleatorias discretas 209

8.1 La distribución de Poisson 209
8.2 La distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial 211
8.3 El proceso de Poisson 218
8.4 La distribución geométrica 224
8.5 La distribución de Pascal 228
8.6 Relación entre las distribuciones binomial y de Pascal 230
8.7 La distribución hipergeométrica 231
8.8 La distribución multinomial 233
Problemas 234

Capítulo 9 Algunas variables aleatorias continuas importantes 239

9.1 Introducción 239
9.2 La distribución normal 239
9.3 Propiedades de la distribución normal 240
9.4 Tabulación de la distribución normal 244
9.5 La distribución exponencial 249
9.6 Propiedades de la distribución exponencial 250
9.7 La distribución gama 254
9.8 Propiedades de la distribución gama 255
9.9 La distribución χ–cuadrada 258
9.10 Comparación entre varias distribuciones 260
9.11 La distribución normal bivariada 261
9.12 Distribuciones truncadas 263
Problemas 269

Capítulo10 La función generadora de momentos 275

10.1 Introducción 275
10.2 La función generadora de momentos 276
10.3 Ejemplos de funciones generadoras de momentos 278
10.4 Propiedades de la función generadora de momentos 281
10.5 Propiedades reproductivas 286
10.6 Sucesiones de variables aleatorias 291
10.7 Nota final 292
Problemas 292

Capítulo11 Aplicaciones a la teoría de la confiabilidad 297

11.1 Conceptos básicos 297
11.2 La ley normal de falla 301
11.3 La ley exponencial de falla 303

11.4 La ley exponencial de falla y la distribución de Poisson 307
11.5 La ley de fallas de Weibull 309
11.6 Confiabilidad de los sistemas 311
Problemas 316

Capítulo12 Sumas de variables aleatorias 323

12.1 Introducción 323
12.2 La ley de los grandes números 324
12.3 Aproximación normal de la distribución binomial 327
12.4 El teorema de límite central 331
12.5 Otras distribuciones aproximadas por la distribución normal: de Poisson, de Pascal y gama 338
12.6 La distribución de la suma de un número finito de variables aleatorias 339
Problemas 346

Capítulo13 Muestras y distribuciones muestrales 349

13.1 Introducción 349
13.2 Muestras aleatorias 351
13.3 Estadísticos 354
13.4 Algunos estadísticos importantes 355
13.5 La transformación integral 363
Problemas 368

Capítulo14 Estimación de parámetros 373

14.1 Introducción 373
14.2 Criterios para estimados 375
14.3 Algunos ejemplos 378
14.4 Estimados de máxima verosimilitud 384
14.5 El método de los mínimos cuadrados 395

14.6 El coeficiente de correlación 399
14.7 Intervalos de confianza 401
14.8 la distribución t de Student 403
14.9 Más sobre los intervalos de confianza 406
Problemas 411

Capítulo15 Pruebas de hipótesis 417

15.1 Introducción 417
15.2 Formulación general: distribución normal con varianza conocida 424
15.3 Ejemplos adicionales 429
15.4 Prueba para la bondad de ajuste 434
Problemas 442

Referencias 447

Apéndice 451

Respuestas a problemas seleccionados 465

Índice de materias 475

1 Introducción a la probabilidad

1.1 Modelos matemáticos

En este capítulo se tratará el tipo de fenómeno del que nos ocuparemos en este libro. Además, formularemos un modelo matemático que nos servirá para investigar este fenómeno en forma bastante precisa.

Al principio es muy importante distinguir entre el fenómeno observable en sí mismo y el modelo matemático para dicho fenómeno. Evidentemente, no influimos de manera alguna sobre lo que observamos; sin embargo, al elegir un modelo, si podemos aplicar nuestro juicio crítico. Esto ha sido muy bien expresado por el profesor J. Neyman, quien escribió:*

> "Cada vez que utilizamos las matemáticas con el objeto de estudiar fenómenos observables es indispensable empezar por construir un modelo matemático (determinista o probabilístico) para estos fenómenos. Necesariamente, este modelo debe simplificar las cosas y permitir la omisión de

* *University of California Publications in Statistics*, Vol. I, University of California Press, 1954.

ciertos detalles. El éxito del modelo depende de si los detalles que se omitieron tienen o no importancia en el desarrollo de los fenómenos estudiados. La solución del problema matemático puede ser correcta y aún así estar en desacuerdo con los datos observados, debido sencillamente a que no estaba probada la validez de las suposiciones básicas que se hicieron. Normalmente es bastante difícil afirmar con certeza si un modelo matemático es adecuado o no, *antes* de obtener algunos datos, mediante la observación. Para verificar la validez del modelo, debemos *deducir* un cierto número de consecuencias del mismo y luego comparar con las observaciones esos resultados *predichos*."

Debemos tener presentes las ideas anteriores al considerar algunos fenómenos obtenidos en la observación y los modelos apropiados para su descripción. Examinemos primero lo que podría llamarse adecuadamente *un modelo determinista*. Así designamos al modelo que estipula que las condiciones en las que se verifica un experimento determinan el resultado del mismo. Por ejemplo, si colocamos una batería en un circuito simple, el modelo matemático que posiblemente describiría el flujo observable de corriente sería $I = E/R$, que es la ley de Ohm. El modelo predice el valor de I tan pronto se dan E y R. En otras palabras, si se repitiese el experimento anterior cierto número de veces, empleando cada vez el mismo circuito (esto es, manteniendo fijas E y R), posiblemente hubiéramos esperado observar el mismo valor de I. Cualquier desviación que pudiese ocurrir sería tan pequeña que la mayor parte de los objetivos de la descripción anterior (que es el modelo) se cumplirían. La realidad es que la batería, el alambre y el amperímetro utilizados para generar y medir la corriente y nuestra destreza para usar los instrumentos de medición determinan el resultado de cada repetición. (Hay ciertos factores que muy bien pueden ser distintos de repetición en repetición y que, sin embargo, no afectarán el resultado de manera notable. Por ejemplo, se puede considerar con razón que la temperatura y la humedad en el laboratorio, o bien la altura de la persona que lee el amperímetro, no tienen influencia en el resultado.)

Hay muchos ejemplos de "experimentos" en la naturaleza para los cuales los modelos deterministas son apropiados. Por ejemplo, las leyes gravitacionales describen con precisión lo que sucede a un cuerpo que cae en ciertas condiciones. Las leyes de Kepler nos indican el comportamiento de los planetas. En cada caso, el modelo señala que las condiciones en las cuales se verifican ciertos fenómenos determinan el valor de ciertas variables observables: la *magnitud* de la velocidad, el *área* recorrida durante cierto periodo de tiempo, etc. Estas cifras aparecen

en muchas de las fórmulas con las cuales estamos familiarizados. Por ejemplo, sabemos que en ciertas condiciones, la distancia recorrida (verticalmente sobre el suelo) por un objeto está dada por: $s = -16t^2 + v_0 t$, donde v_0 es la velocidad inicial y t es el tiempo empleado. Lo que queremos destacar no es la forma particular de la ecuación anterior (que es cuadrática), sino el hecho de que hay una relación definida entre t y s que determina unívocamente la cantidad del primer miembro de la ecuación, si se dan las del segundo miembro.

En muchos casos el modelo matemático determinista antes descrito es suficiente. Sin embargo, hay también muchos fenómenos que necesitan un modelo matemático distinto para su investigación. Esos son los que llamaremos modelos no *deterministas o probabilísticos*. (Otro término muy usado es modelo *estocástico*.) Más adelante, en este capítulo consideraremos en forma muy precisa cómo se pueden describir tales modelos probabilísticos. De momento consideraremos unos cuantos ejemplos.

Supongamos que tenemos un pedazo de material radiactivo que emite partículas α. Con la ayuda de un dispositivo para medir podríamos registrar el número de partículas emitidas durante un determinado intervalo de tiempo. Es evidente que no podemos predecir exactamente el número de partículas emitidas, aunque sepamos la forma exacta, la dimensión, la composición química y la masa del objeto que se considera. Así no parece haber un modelo determinista razonable que nos indique el número de partículas emitidas, digamos n, como una función de varias características propias de la fuente de radiactividad. En su lugar, debemos considerar un modelo probabilístico.

A manera de otro ejemplo, consideraremos la siguiente situación meteorológica. Deseamos determinar cuánta lluvia caerá debido a una tormenta que pasa por una zona específica. Los instrumentos para registrar la cantidad de lluvia están listos. Las observaciones meteorológicas pueden darnos información considerable sobre la tormenta que se aproxima: la presión barométrica en diversos puntos, los cambios de presión, la velocidad del viento, el origen y la dirección de la tormenta, así como otros datos tomados a gran altura. Pero como esta información tan valiosa es para predecir de modo muy general la forma de la precipitación (débil, regular, intensa), sencillamente no permite saber con mucha exactitud *cuánta* lluvia caerá. De nuevo, estamos considerando un fenómeno que por sí mismo no se presta a un tratamiento determinista. Un modelo probabilístico describe la situación con mayor exactitud.

En principio podríamos indicar cuánta lluvia cayó, si la teoría se hubiera desarrollado (lo que no se hizo). Por lo tanto, usamos un modelo probabilístico. En el ejemplo relacionado con la desintegración radiactiva, debemos usar un modelo probabilístico *aun en principio.*

A riesgo de adelantarnos a discutir un concepto que se definirá más tarde, indiquemos simplemente que en un modelo determinista se supone que el resultado real (sea numérico o de otra especie) está definido por las condiciones en las cuales se efectúa el experimento o procedimiento. En un modelo no determinista, sin embargo, las condiciones experimentales sólo determinan el comportamiento probabilístico (más específicamente, la distribución probabilística) de los resultados observables.

En otras palabras, en un modelo determinista, utilizamos "consideraciones específicas" para predecir el resultado, mientras que en un modelo probabilístico usamos la misma clase de consideraciones que para especificar una distribución de probabilidades.

1.2 Introducción a los conjuntos

Con el fin de discutir los conceptos básicos del modelo probabilístico que deseamos desarrollar, será muy conveniente tener presentes algunas ideas y conceptos de la teoría matemática de conjuntos. Este tema es muy extenso y se ha escrito mucho acerca de él. Sin embargo, aquí sólo necesitaremos algunas nociones básicas.

Un *conjunto* es una colección de objetos. Comúnmente los conjuntos se designan con letras mayúsculas A, B, etc. Para describir qué objetos están contenidos en el conjunto A, se dispone de tres métodos.

a) Podemos anotar los elementos de A. Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ indica el conjunto que contiene los enteros positivos 1, 2, 3 y 4.

b) Podemos describir al conjunto A con palabras. Por ejemplo, podríamos decir que A está formado por todos los números reales entre 0 y 1, inclusive.

c) Para describir el conjunto anterior, simplemente escribimos $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$; es decir, A es el conjunto de todas las x, donde x es un número real comprendido entre 0 y 1, inclusive.

Los objetos que forman la colección del conjunto A se llaman *miembros* o *elementos* de A. Cuando "a" es un elemento de A escribimos $a \in A$ y cuando "a" no es un elemento de A escribimos $a \notin A$.

Hay dos conjuntos especiales que a menudo son de interés. En la mayor parte de los problemas estamos interesados en el estudio de un

conjunto definido de objetos, y no de otros; por ejemplo, en todos los números reales, en todos los artículos que salen de una línea de producción durante un periodo de 24 horas, etc. Definimos el *conjunto universal* como el conjunto de todos los objetos que se consideran. Normalmente este conjunto se designa con U.

Otro conjunto que se debe destacar de manera especial puede aparecer como sigue. Supongamos que se describe el conjunto A como el conjunto de todos los números *reales* x que satisfacen la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Evidentemente sabemos que no pueden existir tales números. ¡El conjunto A no contiene ningún elemento! Esta situación ocurre tan a menudo que justifica la introducción de un nombre especial para tal conjunto. Por lo tanto, definimos el conjunto *nulo o vacío* como el conjunto que no contiene elementos. En general, este conjunto se designa con $\emptyset$.

Puede suceder que cuando se consideran dos conjuntos A y B, ser miembro de A implica ser un elemento de B. En tal caso se dice que A es un *subconjunto* de B y se escribe $A \subset B$. Se da una interpretación semejante a $B \subset A$. Decimos que dos conjuntos son el mismo $A = B$, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. Esto es, dos conjuntos son *iguales* si y sólo si contienen los mismos elementos.

Las dos propiedades siguientes del conjunto nulo y del conjunto universal son inmediatas.

a) Para cualquier conjunto A, se tiene $\emptyset \subset A$.

b) Una vez que se ha acordado el conjunto universal, entonces para cualquier conjunto A considerado que está en U, tenemos $A \subset U$.

EJEMPLO 1.1. Suponga que U = todos los números reales, $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$ y $C = \{x \mid x = -3, 1, 2\}$. Entonces $A \subset B$ y $B = C$.

Ahora consideremos la importante idea de *combinar* conjuntos dados con el fin de formar un nuevo conjunto. Se consideran dos operaciones básicas. Éstas son paralelas, en ciertos aspectos, a las operaciones de suma y multiplicación de números. Supongamos que A y B son dos conjuntos. Definamos C como la *unión* de A y B (algunas veces llamada la suma de A y de B) de la manera siguiente:

$$C = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B \text{ (o ambos)}\}.$$

Esto lo escribimos así: $C = A \cup B$. Así, C está formada por todos los elementos que están en A, o en B, o en ambos.

Definimos D como la *intersección* de A y B (algunas veces designado como el producto de A y B) como sigue:

$$D = \{x \mid x \in A \ y \ x \in B\}.$$

Escribamos esto como $D = A \cap B$. Es así como D posee todos los elementos que están en A y en B.

Finalmente presentamos la idea del *complemento* de un conjunto A como sigue: el conjunto designado por A, formado por todos los elementos que *no* están en A (sino en el conjunto universal U) se llama el complemento de A. Esto es, $A^c = \{x \mid x \notin A\}$.

Se puede usar con mucha ventaja un recurso gráfico conocido como *diagrama de Venn* cuando se combinan conjuntos de la manera antes indicada. En cada uno de los diagramas de la figura 1.1, la región *sombreada* representa el conjunto considerado.

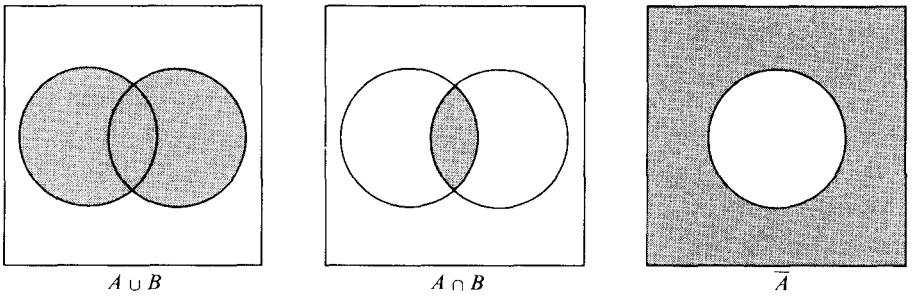


FIGURA 1.1

EJEMPLO 1.2. Supóngase que $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$. Hallamos que $A^c = \{5,6,7,8,9,10\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $A \cap B = \{3,4\}$. Nótese que al describir un conjunto (tal como $A \cup B$) anotamos cada elemento exactamente una vez.

Las operaciones anteriores de unión e intersección definidas justamente para dos conjuntos pueden extenderse de una manera obvia para cualquier número finito de conjuntos. Así definimos $A \cup B \cup C$ como $A \cup (B \cup C)$ o $(A \cup B) \cup C$, que es el mismo, como fácilmente se puede verificar. De igual manera, definimos $A \cap B \cap C$ como $A \cap (B \cap C)$ o $(A \cap B) \cap C$ que también puede verificarse que son iguales. Y es evidente

que podemos continuar esas construcciones de conjuntos nuevos para *cualquier* número *finito* de conjuntos dados.

Afirmábamos que ciertos conjuntos eran lo mismo, por ejemplo $A \cap (B \cap C)$ y $(A \cap B) \cap C$. Resulta que hay varios conjuntos *equivalentes*, algunos de los cuales se indican más adelante. Si recordamos que dos conjuntos son iguales siempre que contengan los mismos elementos, es fácil verificar que los enunciados establecidos son verdaderos. El lector debe convencerse por sí mismo con ayuda de los diagramas de Venn.

$$\begin{aligned} &a)\ A \cup B = B \cup A, && b)\ A \cap B = B \cap A, \\ &c)\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, && d)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nos referimos a *a*) y *b*) como las propiedades *conmutativas*, y a *c*) y *d*) como las propiedades *asociativas*.

Hay otros *conjuntos idénticos* que contienen unión, intersección y complementación. Los más importantes se indican a continuación. En cada caso, su validez puede verificarse con ayuda de un diagrama de Venn.

$$\begin{aligned} &e)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ &f)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ &g)\ A \cap \emptyset = \emptyset, && i)\ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \\ &h)\ A \cup \emptyset = A, && k)\ (A^c)^c = A. \\ &j)\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \end{aligned} \tag{1.2}$$

Observamos que *g*) y *h*) indican que $\emptyset$ se comporta entre los conjuntos (respecto a las operaciones $\cup$ e $\cap$) como lo hace el número cero entre números (respecto a las operaciones de suma y multiplicación).

Para lo que sigue se necesita una construcción adicional de un conjunto, dados dos (o más) conjuntos.

Definición. Sean A y B dos conjuntos. Indicaremos como el *producto cartesiano* de A y B, escrito como $A \times B$, al conjunto $\{(a, b), a \in A, b \in B\}$, esto es, el conjunto de todos los pares ordenados, donde el primer elemento se toma de A y el segundo de B.

Ejemplo 1.3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Entonces, $A \times B = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,4), (2,1), \ldots, (2,4), (3,1), \ldots, (3,4)\}$.

Observación: En general, $A \times B \neq B \times A$.

La noción anterior puede extenderse como sigue: si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos, entonces $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i\}$ esto es, el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas.

Un caso especialmente importante aparece cuando tomamos el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo, esto es, $A \times A$ o $A \times A \times A$. Ejemplos así aparecen cuando nos relacionamos con el plano euclidiano, $R \times R$, donde R es el conjunto de todos los números reales y el espacio euclidiano tridimensional se representa como $R \times R \times R$.

El *número de elementos* en un conjunto nos será de mucha utilidad. Si hay un número finito de elementos en A, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ decimos que A es *finito*. Si hay un número infinito de elementos en A que pueden ponerse en una *correspondencia uno–a–uno* con los enteros positivos, decimos que A es *infinito contable* o *infinito numerable*. (Se puede demostrar, por ejemplo, que el conjunto de todos los números racionales es infinito contable.) Finalmente debemos considerar el caso de un conjunto infinito no numerable. Tales conjuntos contienen un número infinito de elementos que no pueden ser enumerados. Se puede demostrar, por ejemplo, que para dos números reales cualesquiera $b > a$, el conjunto $A = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ tiene un número no numerable de elementos. Puesto que debemos asociar con cada número real un punto sobre la recta de los números reales, lo anterior expresa que cualquier intervalo (no degenerado) contiene más de un número contable de puntos.

Los conceptos antes mencionados, aunque representan sólo un breve bosquejo de la teoría de conjuntos, son suficientes para nuestro propósito: describir con rigor y precisión considerables las ideas básicas de la teoría de la probabilidad.

1.3 Ejemplos de experimentos no deterministas

Estamos ahora listos para discutir lo que entendemos por experimento "aleatorio" o "no determinista". (Más precisamente, daremos ejemplos de fenómenos para los cuales los modelos no deterministas son apropiados. Esta es una distinción que el lector deberá mantener presente. Así nos referiremos frecuentemente a experimentos no deterministas o aleatorios, cuando de hecho estamos hablando de un modelo no determinista para un experimento.) No pretenderemos dar una definición precisa de diccionario para este concepto. En su lugar, daremos numerosos ejemplos que la ilustran.

E_1: Se lanza un dado y se observa el número que aparece en la cara superior.

E_2: Se lanza una moneda cuatro veces y se cuenta el número total de caras obtenidas.

E_3: Se lanza una moneda cuatro veces y se observa la sucesión de caras y sellos obtenidos.

E_4: Se fabrican artículos en una línea de producción y se cuenta el número de artículos defectuosos producidos en un periodo de 24 horas.

E_5: El ala de un aeroplano se arma con un gran número de remaches. Se cuenta el número de remaches defectuosos.

E_6: Se fabrica una bombilla. Luego se prueba su duración conectándola en un portalámparas y se anota el tiempo transcurrido (en horas) hasta que se quema.

E_7: En un lote de 10 artículos hay 3 defectuosos. Se elige un artículo después de otro (sin sustituir el artículo elegido) hasta que se obtiene el último artículo defectuoso. Se cuenta el número total de artículos sacados del lote.

E_8: Se fabrican artículos hasta producir 10 no defectuosos. Se cuenta el número total de artículos manufacturados.

E_9: Se lanza un proyectil. Después de un tiempo determinado t, se anotan los tres componentes de la velocidad v_x, v_y y v_z.

E_{10}: Se observa un proyectil recién lanzado en tiempos, $t_1, t_2, \ldots, t_n$. En cada oportunidad se anota la altura del proyectil sobre el suelo.

E_{11}: Medir la resistencia a la tensión de una barra de acero.

E_{12}: De una urna que contiene sólo esferas negras, se escoge una esfera y se anota su color.

E_{13}: Un termógrafo marca la temperatura continuamente en un periodo de 24 horas. En un sitio y en una fecha señalados, "leer" dicho termógrafo.

E_{14}: En la situación descrita en E_{13} se anotan las temperaturas mínima y máxima, x y y del periodo de 24 horas considerado.

¿Qué tienen en común los experimentos anteriores? Los siguientes aspectos son importantes para nuestra descripción de un *experimento aleatorio*.

a) Es posible repetir cada experimento en forma indefinida sin cambiar esencialmente las condiciones.

b) Aunque en general no podemos indicar cuál será un resultado *particular*, podemos describir el conjunto de *todos* los resultados *posibles* del experimento.

c) A medida que el experimento se repite, los resultados individuales parecen ocurrir en forma caprichosa. Sin embargo, como el experimento se repite un *gran* número de veces, aparece un patrón definido o regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo matemático preciso con el cual analizamos el experimento. Más adelante abundaremos sobre la naturaleza e importancia de esta regularidad. Por el momento, el lector sólo necesita pensar en lanzamientos repetidos de una moneda regular. Aunque las caras y sellos aparecerán sucesivamente de manera casi arbitraria, es bien conocido el hecho empírico de que, después de un gran número de lanzamientos, la proporción de caras y sellos será aproximadamente igual.

Debe notarse que todos los experimentos antes descritos satisfacen estas características generales. (Por supuesto, la última característica mencionada solamente se puede verificar por experimentación; dejaremos a la intuición del lector creer que si el experimento se repitiese un gran número de veces, la regularidad mencionada sería evidente. Por ejemplo, si se probase un número de bombillas del mismo fabricante, posiblemente el número de bombillas quemadas, digamos en más de 100 horas, podría ser predicha con bastante exactitud.) Nótese que el experimento E_{12} tiene la peculiaridad de que sólo es posible un resultado. En general, tales experimentos no serán de interés, por el hecho de que no sabemos qué resultado particular ocurrirá cuando se realice un experimento y que lo hace interesante para nosotros.

Observación: Al describir los diversos experimentos, hemos especificado no sólo el procedimiento que se realiza, sino también lo que estamos interesados en observar (ver, por ejemplo, la diferencia entre E_2 y E_3. Éste es un punto muy importante al cual nos referiremos más adelante cuando estudiemos las variables aleatorias. Por el momento, observemos simplemente que, como una consecuencia de un solo procedimiento experimental o la ocurrencia de un solo fenómeno, se pudieron calcular *varios* valores numéricos diferentes. Por ejemplo, si se elige una persona entre un gran grupo (y la elección propiamente dicha se hace según el procedimiento experimental antes indicado), podríamos estar interesados en la altura, peso, ingreso anual, número de hijos, etc., de la persona. Naturalmente, en la mayoría de los casos sabemos, antes de comenzar nuestro experimento, las características numéricas que nos interesan.

1.4 El espacio muestral

Definición. Con cada experimento ε del tipo que consideramos, definimos el *espacio muestral* como el conjunto de todos los resulta-

dos posibles de ε. Usualmente designamos este conjunto como S. (En nuestro contexto, S representa el conjunto universal descrito previamente.)

Consideremos cada uno de los experimentos anteriores y describamos el espacio muestral de cada uno. El espacio muestral S_i se referirá al experimento E_i.

S_1: $\{1,2,3,4,5,6\}$.

S_2: $\{0,1,2,3,4\}$.

S_3: {Todas las sucesiones posibles de la forma a_1, a_2, a_3, a_4 donde cada $a_i = C$ o S según si aparece cara o sello en el i-ésimo lanzamiento}.

S_4: $\{0,1,2,...,N\}$, donde N es el número máximo que se pudo producir en 24 horas.

S_5: $\{0,1,2,...,M\}$, donde M es el número de remaches instalados.

S_6: $\{t \mid t \geq 0\}$.

S_7: $\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

S_8: $\{10,11,12,...\}$.

S_9: $\{v_x, v_y, v_z, \mid v_x, v_y, v_z$ números reales$\}$.

S_{10}: $h_1,...,h_n \mid h_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n\}$.

S_{11}: $\{S \mid S \geq 0\}$.

S_{12}: {esfera negra}.

S_{13}: Este espacio muestral es el más importante de los que aquí consideramos. Prácticamente debemos suponer que la temperatura en cierta localidad específica nunca puede subir o bajar con relación a ciertos valores, digamos M y m. Fuera de esta restricción, debemos admitir la posibilidad de que aparezca cualquier gráfica con determinadas características. Es posible que ésta no tenga saltos (esto es, representará una función continua). Además, la gráfica tendrá ciertas características de suavidad que pueden resumirse en forma matemática al decir que la gráfica representa una función diferenciable. Así, finalmente podemos enunciar que el espacio muestral es

$\{f \mid f$ una función diferenciable, que satisface $m \leq f(t) \leq M$, para toda $t\}$.

S_{14}: $\{(x,y) \mid m \leq x \leq y \leq M\}$. Es decir, S_{14} consta de todos los puntos que están sobre y en un triángulo en el plano bidimensional x, y.

(En este libro no nos preocuparemos por los espacios muestrales de la complejidad encontrada en S_{13}. Sin embargo, tales espacios muestrales aparecen, pero para su estudio se necesitan matemáticas más avanzadas que las que presuponemos.)

A fin de describir un espacio muestral asociado con un experimento, debemos tener una idea muy clara de lo que medimos u observamos. Por tanto, deberíamos hablar de "un" espacio muestral asociado con un experimento en vez de "el" espacio muestral. A este respecto obsérvese la diferencia entre S_2 y S_3.

Nótese también que el resultado de un experimento no necesita ser un número. Por ejemplo, en E_3 cada resultado es una sucesión de caras y sellos. En E_9 y E_{10} cada resultado consiste en un vector, mientras que en E_{13} es una función.

Será importante analizar de nuevo el *número* de resultados en un espacio muestral. Surgen tres posibilidades: el espacio muestral puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable. Refiriéndose a los ejemplos anteriores, notemos que $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7$ y S_{12} son finitos, S_8 es infinito numerable, y $S_6, S_9, S_{10}, S_{11}, S_{13}$ y S_{14} son infinitos no numerables.

En este punto podría ser útil comentar la diferencia entre un espacio muestral matemáticamente "idealizado" y uno realizable de manera experimental. Para este propósito, consideramos el experimento E_6 y su espacio muestral asociado S_6. Es evidente que cuando anotamos el tiempo total t durante el cual funciona una bombilla, somos "víctimas" de la precisión de nuestros instrumentos de medición. Supongamos que tenemos un instrumento que es capaz de marcar el tiempo con dos cifras decimales, por ejemplo 16:43 horas. Con esta restricción impuesta nuestro espacio muestral llega a ser *infinito numerable*: $\{0.0, 0.01, 0.02, \dots\}$. Aun más, es muy realista suponer que ninguna bombilla puede durar posiblemente más de H horas, donde H podría ser un número muy grande. Así, parece que si somos completamente realistas en la descripción de este espacio muestral, estamos considerando un espacio muestral *finito*: $\{0.0, 0.01, 0.02, \dots, H\}$. El número total de resultados sería $(H/0.01) + 1$, que sería un número muy grande si H es moderadamente grande, por ejemplo, $H = 100$. Resultaría matemáticamente más simple y conveniente suponer que *todos* los valores de $t \geq 0$ son resultados posibles y, por tanto, considerar el espacio muestral S_6 como se definió en principio.

En virtud de los comentarios anteriores, varios de los espacios muestrales descritos son ideales. En todas las situaciones subsiguientes, el espacio muestral considerado será el que resulte más conveniente en términos matemáticos. En la mayoría de los problemas no habrá muchas dudas en cuanto a la elección apropiada del espacio muestral.

1.5 Eventos

Otra noción básica es el concepto de un evento. Un evento A (respecto a un espacio muestral particular S asociado con un experimento ε) es simplemente un conjunto de resultados posibles. En la terminología de conjuntos, un evento es un *subconjunto* del espacio muestral S. En vista de nuestra exposición previa, esto significa que S mismo es un evento y también lo es el conjunto vacío $\emptyset$. Cualquier resultado individual también puede considerarse como un evento.

Los siguientes son ejemplos de eventos. Otra vez nos referimos a los experimentos antes anotados: A_i se referirá a un evento asociado con el experimento E_i.

A_1: Un número par ocurre; esto es, $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
A_2: $\{2\}$; es decir, ocurren dos caras.
A_3: $\{CCCC, CCCS, CCSC, CSCC, SCCC\}$; es decir, salen más caras que sellos.
A_4: $\{0\}$; es decir, todos los artículos fueron no defectuosos.
A_5: $\{3, 4, ..., M\}$; es decir, más de dos remaches fueron defectuosos.
A_6: $\{t \mid t < 3\}$; es decir, la bombilla se quema en menos de tres horas.
A_{14}: $\{(x, y) \mid y = x + 20\}$; es decir, el máximo es 20° mayor que el mínimo.

Cuando el espacio muestral S es finito o infinito numerable, *todo* subconjunto se puede considerar como un evento. [Es un ejercicio fácil de verificar, y que haremos en breve, si S tiene n elementos, hay exactamente 2^n subconjuntos (eventos).] Sin embargo, si S es infinito no numerable, aparece una dificultad teórica. Resulta que no cualquier subconjunto concebible se puede considerar como un evento. Por razones que escapan al nivel de esta presentación, ciertos subconjuntos "no admisibles" deben ser excluidos. Por fortuna, tales conjuntos no admisibles en realidad no aparecen en las aplicaciones y, por tanto, no nos interesarán aquí. En lo que sigue se supondrá tácitamente que cada

vez que mencionemos un evento será de la clase que nos está permitido considerar.

Podemos usar ahora los diversos métodos para combinar conjuntos (es decir, eventos) y obtener los nuevos conjuntos (es decir, eventos) que presentamos con anterioridad.

a) Si A y B son eventos, $A \cup B$ es el evento que ocurre si y sólo si A o B (o ambos) ocurren.

b) Si A y B son eventos, $A \cap B$ es el evento que ocurre si y sólo si A y B ocurren.

c) Si A es un evento, A^c es el evento que ocurre si y sólo si A *no* ocurre.

d) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\cup_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.

e) Si $A_1, \ldots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\cap_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos Ai ocurren.

f) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección infinita (numerable) de eventos, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es el evento que ocurre si y sólo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.

g) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ es cualquier colección infinita (numerable) de eventos, entonces $\cap_{i=1}^{\infty} A_1$ es el evento que ocurre si y sólo si *todos* los eventos A_i ocurren.

h) Supóngase que S representa el espacio muestral asociado con un experimento ε y realizamos ε dos veces. Entonces S x S se puede utilizar para representar todos los resultados de esas dos repeticiones. Es decir, $(s_1, s_2) \in S \times S$ significa que s_1 resultó cuando se realizó ε la primera vez y s_2 cuando se realizó ε la segunda vez.

i) Evidentemente, el ejemplo *h* se puede generalizar. Consideremos n repeticiones de un experimento ε cuyo espacio muestral es S. Entonces, $S \times S \times \cdots \times S = \{(s_1, s_2, \ldots, S_n), s_i \in S, i = 1, \ldots, n\}$ representa el conjunto de todos los resultados posibles cuando ε se realiza n veces. En cierto sentido, $S \times S \times \cdots \times S$ es un espacio muestral en sí mismo, o sea el espacio muestral asociado con n repeticiones de ε.

Definición. Se dice que dos eventos, A y B *son mutuamente excluyentes* si no pueden ocurrir juntos. Expresamos esto escribiendo $A \cap B = \emptyset$; es decir, la intersección de A y B es el conjunto vacío.

EJEMPLO 1.4. Se prueba un artefacto electrónico y se registra su tiempo total de uso, digamos t. Supongamos que el espacio muestral es $\{t \mid t \geq 0\}$. Sean A, B y C tres eventos definidos como sigue:

$$A = \{t \mid t < 100\}; \qquad B = \{t \mid 50 \leq t \leq 200\}; \qquad C = \{t \mid t > 150\}.$$

Entonces,

$$A \cup B = \{t \mid t \leq 200\}; \quad A \cap B = \{t/50 \leq t \leq 100\};$$

$$B \cup C = \{t \mid t \geq 50\}; \quad B \cap C = \{t \mid 150 < t \leq 200\}; \quad A \cap C = \emptyset;$$

$$A \cup C = \{t \mid t < 100 \text{ o } t > 150\}; \; A^c = \{t \mid t \geq 100\}; \; C^c = \{t \mid t \leq 150\}.$$

Como se estudió en la sección anterior, una de las características básicas del concepto de "experimento" es que no sabemos qué resultado particular se obtendrá al realizarlo. En otras palabras, si A es un evento asociado con el experimento, no podemos indicar con certeza que A ocurrirá o no. Por lo tanto, llega a ser muy importante tratar de asociar un número con el evento A que medirá, de alguna manera, la posibilidad de que el evento A ocurra. Esta tarea nos conduce a la teoría de probabilidad.

1.6 Frecuencia relativa

Para motivar el planteamiento adoptado para la solución del problema anterior, consideremos el procedimiento siguiente. Supóngase que repetimos n veces el experimento ε y sean A y B dos eventos asociados con ε. Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el evento A y el evento B ocurrieron en las n repeticiones.

Definición. $f_A = n_A/n$ se llama *frecuencia relativa* del evento A en las n repeticiones de ε. La frecuencia relativa f_A tiene las siguientes propiedades importantes, que son verificables fácilmente.

1) $0 \leq f_A \leq 1$.
2) $f_A = 1$ si y sólo si A ocurre *cada vez* en las n repeticiones.
3) $f_A = 0$ si y sólo si A *nunca* ocurre en las n repeticiones.
4) Si A y B son dos eventos que se excluyen mutuamente y si $f_{A\cup B}$ es la frecuencia relativa asociada al evento $A \cup B$, entonces $f_{A\cup B} = f_A + f_B$.
5) f_A, basada en las n repeticiones del experimento y considerada para una función de n, "converge" en cierto sentido probabilístico a $P(A)$ cuando $n \to \infty$.

Observación: La propiedad 5) obviamente está indicada de manera vaga en este momento. Sólo más adelante (Sec. 12.2) podremos precisar más esta idea. Por ahora indiquemos simplemente que la propiedad 5) encierra la noción bastante intuitiva de que la frecuencia relativa con base en un número creciente de observaciones tiende a "estabilizarse" en la proximidad de un valor definido. Esto *no* es lo mismo que el concepto corriente de convergencia que se encuentra en otra parte en matemáticas. En realidad, como se indicó aquí, ésta no es del todo una conclusión matemática, sino simplemente un hecho empírico.

La mayor parte de nosotros intuitivamente estamos conscientes de este fenómeno de estabilización, aunque puede ser que nunca lo hayamos verificado. Hacerlo requiere una considerable cantidad de tiempo y paciencia, ya que se necesita un gran número de repeticiones de un experimento. Sin embargo, algunas veces podemos ser observadores inocentes de este fenómeno, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.5. Supóngase que estamos parados en una acera y nos fijamos en dos losas de concreto adyacentes. Imaginemos que empieza a llover de tal manera que realmente podemos distinguir unas gotas de otras y les seguimos la pista para averiguar si caen en una losa o en otra. Continuamos observando las gotas individuales y anotamos su punto de impacto. Simbolizando la i-ésima gota por X_i, donde $X_i = 1$ si la gota cae en una losa y 0 si cae en la otra, podríamos observar una sucesión tal como 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1. Ahora está claro que no podemos predecir dónde caerá la gota en particular. (Nuestro experimento consiste en una especie de situación meteorológica que origina la caída de las gotas de lluvia.) Si calculamos la frecuencia relativa del evento $A = \{$la gota cae en la losa 1$\}$, entonces la sucesión anterior de resultados da origen a las frecuencias relativas siguientes (con base en la observación de 1, 2, 3, ... gotas): $1, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{4}{9}, \frac{4}{10}, \frac{5}{11}, \ldots$ Esos valores muestran un grado considerable de variación, especialmente al comienzo. Intuitivamente es claro que si continuara en forma indefinida el experimento anterior, esas frecuencias relativas se estabilizarían próximas al valor $\frac{1}{2}$. Porque tenemos toda la razón para creer que después de que haya transcurrido cierto tiempo, las dos losas estarían igualmente mojadas.

Esta propiedad de estabilidad de la frecuencia relativa es aún una noción bastante intuitiva y sólo más tarde podremos precisarla matemáticamente. Lo importante de esta propiedad es que si un experimento se realiza un gran número de veces, la frecuencia relativa con que ocurre un evento A tiende a variar cada vez menos a medida que el número de

repeticiones aumenta. A esta característica se le designa como *regularidad estadística.*

También hemos sido algo imprecisos en nuestra definición de experimento. Exactamente, ¿cuándo un procedimiento o mecanismo, en el sentido que le estamos dando, es un experimento susceptible de estudiarse matemáticamente mediante un modelo no determinista? Antes indicamos que debe ser posible efectuar un experimento una y otra vez sin cambiar las condiciones esenciales. Ahora podemos agregar otro requisito. Cuando el experimento se realiza repetidamente debe presentar la regularidad estadística a la que antes nos referimos. Más adelante estudiaremos un teorema (llamado la ley de los grandes números) que muestra que la regularidad estadística es en realidad una *consecuencia* de la primera condición: la repetibilidad.

1.7 Nociones básicas de probabilidad

Volvamos ahora al problema antes propuesto: asignar un número a cada evento A que medirá la posibilidad de que A ocurra cuando el experimento se realiza. Un planteamiento *posible* podría ser el siguiente: repetir el experimento un gran número de veces, calcular la frecuencia relativa f_A y usar este número. Cuando recordamos las propiedades de f_A, está claro que este número *da* una indicación muy definida de que posibilidad existe de que A ocurra. Aún más, como sabemos que el experimento se repite más y más veces, la frecuencia relativa f_A se estabiliza cerca de algún número, digamos p. Sin embargo, hay dos objeciones serias a este planteamiento. *a*) No está claro cuan grande debe ser n antes de que conozcamos el número. ¿1000? ¿2000? ¿10 000? *b*) Una vez que el experimento se ha descrito por completo y se ha especificado el evento A, el número que buscamos no debe depender del experimentador o de una racha de suerte en particular con la que él experimenta. (Por ejemplo, es posible que con una moneda perfectamente balanceada que se lanzó 10 veces resulte 9 caras y 1 sello. La frecuencia relativa del evento $A = \{$ salen caras$\}$ es así igual a $\frac{9}{10}$. Aunque es posible que en los 10 lanzamientos siguientes el modelo de caras y sellos puede estar invertido.) Lo que queremos es un medio de obtener tal número sin recurrir a la experimentación. Por supuesto, para que el número estipulado sea significativo, cualquier experimento debería dar una frecuencia relativa "cercana" al valor estipulado, en especial si el número de repeticiones en las cuales se calculó la frecuencia relativa es muy grande. Procederemos formalmente como sigue.

Definición. Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado con ε. Con cada evento A asociamos un número real, designado con $P(A)$ y llamado *probabilidad de* A, el cual satisface las siguientes propiedades.

1) $0 \leq P(A) \leq 1$.
2) $P(S) = 1$.
3) Si A y B son eventos que se excluyen mutuamente, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4) Si $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ son eventos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

Observemos que de la propiedad 3 se deduce de inmediato que para cualquier *n finito*,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

La propiedad 4 *no* se sigue; sin embargo, cuando consideramos el espacio muestral idealizado, esta condición será necesaria y, por tanto, se incluye aquí.

La elección de estas propiedades de la probabilidad está obviamente motivada por las características correspondientes de la frecuencia relativa. La propiedad antes mencionada como regularidad estadística, más tarde se ligará con esta definición de probabilidad. Por el momento sólo demostraremos que los valores de $P(A)$ y f_A están "próximos" uno al otro (en cierto sentido), si f_A se basa en un gran número de repeticiones. Este hecho es el que justifica el empleo de $P(A)$ para medir la probabilidad de que A ocurra.

Por el momento no sabemos *cómo* calcular $P(A)$. Sólo hemos anotado algunas propiedades generales que posee $P(A)$. El lector deberá tener un poco más de paciencia (hasta el próximo capítulo), para aprender cómo calcular $P(A)$. Antes de volver a este tema indiquemos y probemos varias consecuencias relativas a $P(A)$ que se deducen de las condiciones, y que en realidad no depende de cómo calculamos $P(A)$.

Teorema 1.1. Si $\emptyset$ es el conjunto vacío, entonces $P(\emptyset) = 0$.

Demostración: Podemos escribir, para cualquier evento A, $A = A \cup \emptyset$. Puesto que A y $\emptyset$ son mutuamente excluyentes, de la propiedad 3 se deduce que $P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$. A partir de esto la conclusión del teorema es inmediata.

Observación: Más adelante tendremos ocasión de ver que el recíproco del teorema anterior no es verdadero. Esto es, si $P(A) = 0$, en general no podemos concluir que $A = \emptyset$, porque hay situaciones en que asignamos probabilidad cero a un evento que puede ocurrir.

Teorema 1.2. Si A^c es el evento complementario de A, entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c) \tag{1.4}$$

Demostración: Podemos escribir $S = A \cup A^c$ y, usando las propiedades 2 y 3, obtenemos $1 = P(A) + P(A^c)$.

Observación: Este es un resultado muy útil porque indica que cada vez que deseamos calcular $P(A)$ en su lugar podemos calcular $P(A^c)$ y obtener el resultado deseado por sustracción. Después veremos que en muchos problemas es más fácil calcular $P(A^c)$ que $P(A)$.

Teorema 1.3. Si A y B son eventos *cualesquiera*, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{1.5}$$

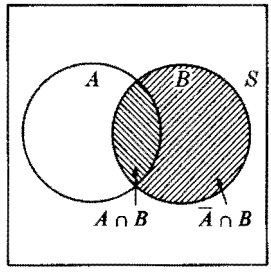


FIGURA 1.2

Demostración: La idea de esta demostración es descomponer $A \cup B$ y B en eventos que se excluyen mutuamente y luego aplicar la propiedad 3. (Véase el diagrama de Venn en la Fig. 1.2)

Así escribimos

$$A \cup B = A \cup (B \cap A^c),$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \cap A^c).$$

Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c),$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap A^c).$$

Sustrayendo la segunda ecuación de la primera, tenemos

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

y, por tanto, se obtiene el resultado.

Observación: Este teorema representa una extensión obvia de la propiedad 3, porque si $A \cap B = \emptyset$, de lo anterior obtenemos el enunciado de la propiedad 3.

Teorema 1.4. Si A, B y C son tres eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \tag{1.6}$$

Demostración: La demostración consiste en escribir $A \cup B \cup C$ como $(A \cup B) \cup C$ y aplicar el resultado del teorema anterior. Dejamos los detalles al lector.

Observación: Una extensión obvia del teorema anterior se sugiere por si misma. Sean $A_1, \ldots, A_k$ k eventos cualesquiera. Entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{k} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<r=3}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \cdots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k). \tag{1.7}$$

Este resultado se puede establecer fácilmente por inducción matemática.

Teorema 1.5. Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Demostración: Podemos descomponer B en dos eventos que se excluyen mutuamente como sigue: $B = A \cup (B \cap A^c)$. Por lo tanto, $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$, puesto que $P(B \cap A^c) \geq 0$, según la propiedad 1.

Observación: Este resultado es intuitivamente atractivo, porque dice que si B *debe* ocurrir cada vez que A ocurre, entonces B es al menos tan probable como A.

1.8 Varias observaciones

a) Cabe aquí una advertencia. De la exposición previa se podría inferir (incorrectamente) que cuando elegimos un modelo probabilístico para la descripción de algún fenómeno observable descartamos todas las relaciones deterministas. Nada puede estar más lejos de la verdad. Mantenemos todavía el hecho de que, por ejemplo, la ley de Ohm $I = E/R$ es válida en ciertas circunstancias. La diferencia será de interpretación. En vez de decir que la relación anterior determina I para E y R dadas, reconoceremos que E o R, o ambas, pueden variar de una manera aleatoria e imprecisa y que, por lo tanto, I variará también de una manera aleatoria. Para E y R *dadas*, todavía I se determina por la relación anterior. Lo importante es cuando adoptamos un modelo probabilístico para la descripción de un circuito, consideramos la posibilidad de que E y R pueden variar de manera imprecisa que sólo se puede describir probabilísticamente. Así, puesto que será importante considerar sólo la *probabilidad* de que E y R tomen ciertos valores, llega a ser significativo hablar sólo de la probabilidad de que I tome ciertos valores.

b) La elección entre adoptar un modelo determinista o probabilístico en algunas ocasiones puede ser difícil. Puede depender de lo intrincado de nuestra técnica de medición y la precisión asociada. Por ejemplo, si las medidas precisas son tan difíciles de obtener que las lecturas repetidas de la misma cantidad produzcan resultados variables, un modelo probabilístico es sin duda más adecuado para describir la situación.

c) Señalaremos en forma breve que en ciertas circunstancias podemos hacer suposiciones adicionales acerca de la conducta probabilística de nuestros resultados experimentales que nos conducirán a un método para evaluar las probabilidades básicas. La elección de esas suposiciones adicionales puede basarse en consideraciones físicas del experimento (ciertas propiedades de simetría, por ejemplo), evidencia empírica o, en algunos casos, simplemente un juicio personal con base en una

experiencia previa ante una situación similar. La frecuencia relativa f_A puede tener un papel importante en nuestra decisión acerca de una asignación numérica de $P(A)$. Sin embargo, es importante darse cuenta de que cualquier suposición que hagamos acerca de $P(A)$ debe ser tal que se satisfagan los axiomas básicos del 1) al 4) de la definición 1.3.

d) En el transcurso del desarrollo de las ideas básicas de la teoría de probabilidad haremos algunas referencias a ciertas analogías con la mecánica. La primera de ellas puede ser apropiada aquí. En mecánica asignamos la masa a cada cuerpo B, digamos $m(B)$. Luego hacemos varios cálculos y llegamos a diversas conclusiones acerca de la conducta de B y su relación con otros cuerpos, muchos de los cuales implican su masa $m(B)$. El hecho de que en realidad tengamos que recurrir a alguna aproximación para obtener $m(B)$ para un cuerpo específico no disminuye la utilidad del concepto de masa. De igual manera, establecemos para cada evento A, asociado con el espacio muestral de un experimento, un número $P(A)$ llamado la probabilidad de A y que satisface los axiomas básicos. En realidad, al calcular $P(A)$ para un evento específico, tenemos que hacer hipótesis adicionales o bien obtener una aproximación basada en evidencias empíricas.

e) Es muy importante darnos cuenta de que hemos postulado la existencia del número $P(A)$ y que hemos postulado ciertas propiedades que posee este número. La validez de las diversas consecuencias (teoremas) derivadas de esos postulados de ninguna manera depende de cómo obtenemos un valor numérico para $P(A)$. Es vital aclarar este punto. Por ejemplo, hemos supuesto que$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. A fin de usar esta relación para la *evaluación* real de $P(A \cup B)$, debemos conocer el valor de $P(A)$ y de $P(B)$. Analicemos brevemente cómo, en ciertas circunstancias, debemos hacer suposiciones adicionales que conduzcan a un método para evaluar esas probabilidades. Si estas (u otras) suposiciones no están garantizadas, debemos recurrir a la experimentación para aproximar el valor de $P(A)$ de los datos reales. La frecuencia relativa f_A desempeñará un papel destacado en esto y, de hecho, se usará como una aproximación de $P(A)$.

Sin embargo, es importante tener presente que f_A y $P(A)$ no son lo mismo, que sólo usamos f_A como aproximación de $P(A)$, y que cada vez que nos referimos a $P(A)$ nos estamos refiriendo al valor postulado. Si "identificamos" f_A con $P(A)$ debemos darnos cuenta que simplemente sustituimos un valor postulado por uno aproximado obtenido en forma experimental. Qué tan buena o mala pueda ser esta aproximación, de ninguna manera influye en la estructura lógica

de nuestro modelo. Aunque el fenómeno que pretende representar el modelo se consideró al construirlo, nos hemos separado del fenómeno mismo (temporalmente al menos), cuando entramos en el dominio del modelo.

PROBLEMAS

1.1. Supóngase que el conjunto universal consta de los enteros positivos de 1 a 10. Sean $A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$ y $C = \{5,6,7\}$. Anote los elementos de los siguientes conjuntos.

a) $A^c \cap B$ *b)* $A^c \cup B$ *c)* $(A^c \cap B^c)^c$ *d)* $(A \cap (B \cap C)^c)^c$ *e)* $(A \cap (B \cup C))^c$

1.2. Supóngase que el conjunto universal U está dado por $U = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$. Sean los conjuntos A y B definidos como sigue: $A = \{x \mid \frac{1}{2} < x \leq 1\}$ y $B = \{x \mid \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}\}$. Describa los conjuntos siguientes:

a) $(A \cup B)^c$ *b)* $A \cup B^c$ *c)* $(A \cap B)^c$ *d)* $A^c \cap B$

1.3. ¿Cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$ *b)* $(A \cup B) = (A \cap B^c) \cup B$
c) $A^c \cap B = A \cup B$ *d)* $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$
e) $(A \cap B) \cap (B^c \cap C) = \emptyset$

1.4. Supóngase que el conjunto universal consta de todos los puntos (x, y) cuyas coordenadas son enteros y quedan dentro o sobre el contorno del cuadrado acotado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$ y $y = 6$. Indique los elementos de los conjuntos siguientes.

a) $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 6\}$ *b)* $B = \{(x,y) \mid y \leq x^2\}$
c) $C = \{(x,y \mid x \leq y^2\}$ *d)* $B \cap C$ *e)* $(B \cup A) \cap C^c$

1.5. Usar los diagramas de Venn para establecer las siguientes relaciones.

a) $A \subset B$ y $B \subset C$ implican que $A \subset C$ *b)* $A \subset B$ implica que $A = A \cap B$
c) $A \subset B$ implica que $B^c \subset A^c$ *d)* $A \subset B$ implica que $A \cup C \subset B \cup C$
e) $A \cap B = \emptyset$ y $C \subset A$ implica que $B \cap C = \emptyset$

1.6. Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) o no defectuosos (N). Se observan los artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o se verifiquen cuatro artículos, cualesquiera que ocurra primero. Describir un espacio muestral para este experimento.

1.7. *a)* Una caja con N bombillas tiene $r (r < N)$ unidades con filamentos rotos. Éstas se prueban una por una, hasta que se encuentra una defectuosa. Describir un espacio muestral para este experimento.

b) Supóngase que las bombillas anteriores se prueban una por una, hasta que se prueban todas las defectuosas. Describir el espacio muestral para este experimento.

1.8. Considérense cuatro objetos, a, b, c y d. Supóngase que el *orden* en el cual se anotan esos objetos representa el resultado de un experimento. Sean A y B los eventos definidos como sigue: $A = \{a$ está en el primer lugar$\}$; $B = \{b$ está en el segundo lugar$\}$.

a) Anotar todos los elementos del espacio muestral.
b) Anotar todos los elementos de los eventos $A \cap B$ y $A \cup B$.

1.9. Un lote contiene artículos que pesan 5, 10, 15,..., 50 libras. Supóngase que al menos dos artículos de cada peso se encuentran allí. Se eligen dos artículos del lote. Identifíquese con X el peso del primer artículo elegido y con Y el peso del segundo artículo. Así, el par de números (X, Y) representa un solo resultado del experimento. Usando el plano XY, indíquese el espacio muestral y los eventos siguientes.

a) $\{X = Y\}$ *b*) $\{Y > X\}$
c) El segundo artículo pesa el doble del primero.
d) El primer artículo pesa 10 libras menos que el segundo.
e) El promedio de peso de los dos artículos es menos de 30 libras.

1.10. En un periodo de 24 horas, en un momento X, un interruptor se pone en la posición "encendido". Posteriormente, en un momento Y (en el mismo periodo de 24 horas), el interruptor se pone en la posición "apagado". Supóngase que X y Y se miden en horas en el eje de tiempo con el comienzo del periodo como origen. El resultado del experimento consta del par de números (X, Y).

a) Describir el espacio muestral.
b) Describir y dibujar los siguientes eventos en el plano XY.
i) El circuito funciona durante una hora o menos.
ii) El circuito funciona en el tiempo z, donde z es un instante durante el periodo dado de 24 horas.
iii) El circuito empieza a funcionar antes del tiempo t_1 y deja de funcionar después del tiempo t_2 (donde otra vez $t_1 < t_2$ son dos instantes de tiempo durante el periodo especificado).
iv) El circuito funciona el doble de lo que está apagado.

1.11. Sean A, B y C tres eventos asociados con un experimento. Expresar las siguientes proposiciones verbales en notación de conjuntos.

a) Al menos uno de los eventos ocurre.
b) Exactamente uno de los eventos ocurre.
c) Exactamente dos de los eventos ocurren.

d) No ocurren más de dos eventos simultáneamente.

1.12. Demostrar el teorema 1.4.

1.13. *a*) Demostrar que para dos eventos cualesquiera, A_1 y A_2, tenemos $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

b) Demostrar que para n eventos cualesquiera $A_1, \ldots A_n$, tenemos

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

[*Sugerencia*: Usar una inducción matemática. El resultado que se indica en *b*) se llama desigualdad de Boole]

1.14. El teorema 1.3 trata de la probabilidad de que *al menos uno* de los eventos A o B ocurra. La proposición siguiente trata de la probabilidad de que *exactamente uno* de los eventos A o B ocurra.

Demostrar que $P[(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

1.15. Cierto tipo de motor eléctrico falla por obstrucción de los cojinetes, por combustión del embobinado o por desgaste de las escobillas. Supóngase que la probabilidad de la obstrucción es del doble de la combustión, la cual es cuatro veces más probable que la inutilización de las escobillas. ¿Cuál es la probabilidad de que la falla sea por cada uno de esos tres mecanismos?.

1.16. Supóngase que A y B son eventos para los cuales $P(A) = x$, $P(B) = y$, y $P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de x, y y z.

a) $P(A^c \cup B^c)$ *b*) $P(A^c \cap B)$ *c*) $P(A^c \cup B)$ *d*) $P(A^c \cap B^c)$

1.17. Supóngase que A, B, y C son eventos tales que $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = P(C \cap B) = 0$ y $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$. Calcular la probabilidad de que al menos uno de los eventos A, B o C ocurra.

1.18. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Sea A el evento de que el motor está en buenas condiciones, mientras que los eventos $B_k (k = 1, 2)$ son los eventos de que la k-ésima caldera esté en buenas condiciones. El evento C es que la instalación pueda funcionar. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera funcione, expresar C y C^c en términos de A y de los eventos de B_i.

1.19. Un mecanismo tiene dos tipos de repuestos, digamos I y II. Suponga que hay dos del tipo I y tres del tipo II. Definir los eventos A_k, $k = 1, 2$ y B_j, $j = 1, 2, 3$ como sigue: A_k: la k-ésima unidad del tipo I está funcionando correctamente; B_j: la j-ésima unidad del tipo II está funcionando correctamente. Finalmente, C representa el evento: el mecanismo funcionan. Dado que el mecanismo funciona si al menos una unidad del tipo I y dos unidades del tipo II funcionan, exprese el evento C en términos de las A_k y las B_j.

2

Espacios muestrales finitos

2.1 El espacio muestral finito

En este capítulo nos ocuparemos sólo de los experimentos para los cuales el espacio muestral S consta de un número *finito* de elementos. Es decir, suponemos que S se puede escribir como $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Si nos referimos a los ejemplos de espacios muestrales de la sección 1.4, observamos que $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_7$ y S_{12} son todos finitos.

A fin de caracterizar $P(A)$ en este modelo consideraremos primero el evento que está constituido por un *solo resultado*, llamado algunas veces evento *elemental*, digamos $A = \{a_i\}$. Procedemos como sigue.

A cada uno de los eventos elementales $\{a_i\}$ asignamos un número p_i, llamado la probabilidad de $\{a_i\}$, que satisface las condiciones siguientes:

a) $p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$

b) $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1.$

[Puesto que $\{a_i\}$ es un evento, estas condiciones deben ser consistentes con las postuladas para las probabilidades de eventos en general, como se hizo en la ecuación (1.3). Es muy sencillo verificar que esto es así.]

A continuación, supongamos que un evento A está constituido por r resultados, $1 \leq r \leq k$, digamos

$$A = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_r}\},$$

donde $j_1, j_2, \ldots, j_r$ representa cualesquiera índices r de $1, 2, \ldots k$. Por lo tanto, de la ecuación (1.3), propiedad 4, se deduce que

$$P(A) = p_{j_1} + p_{j_2} + \cdots + p_{j_r}. \tag{2.1}$$

Para resumir: la asignación de probabilidades p_i a cada uno de los eventos elementales $\{a_i\}$, sujeto a las condiciones anteriores *a*) y *b*), determina de un modo único $P(A)$ para cada uno de los eventos $A \subset S$, donde $P(A)$ está dado por la ecuación (2.1)

Para evaluar las p_j, se deben hacer algunas suposiciones respecto a los resultados individuales.

EJEMPLO 2.1. Supongamos que sólo tres resultados son posibles en un experimento, digamos a_1, a_2 y a_3. Además, supongamos que la ocurrencia de a_1 es dos veces más probable que la de a_2, la cual, a su vez, es dos veces más probable que a_3.

Por tanto, $p_1 = 2p_2$ y $p_2 = 2p_3$. Puesto que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, tenemos que $4p_3 + 2p_3 + p_3 = 1$, lo que finalmente da

$$p_3 = \tfrac{1}{7}, \quad p_2 = \tfrac{2}{7} \quad \text{y} \quad p_1 = \tfrac{4}{7}.$$

2.2 Resultados igualmente probables

La suposición que más comúnmente se hace para espacios muestrales finitos es que todos los resultados son igualmente probables. De ninguna manera esta suposición puede darse como un hecho; debe justificarse con cuidado. Hay muchos experimentos para los cuales se garantiza tal suposición, pero también hay muchas situaciones experimentales en las cuales sería un error hacer tal suposición. Por ejemplo, sería muy poco realista suponer que es tan probable no recibir llamadas telefónicas en una central entre la 1 AM. y 2 AM. como entre las 5 PM y las 6 PM

Si los k resultados son igualmente probables, se deduce que cada $p_i = 1/k$. Porque la condición $p_1 + \cdots + p_k = 1$ se convierte en $kp_i = 1$

para toda i. De esto se deduce que para cualquier evento A que conste de r resultados, tenemos

$$P(A) = r/k.$$

Este método de evaluar $P(A)$ a menudo se indica como sigue:

$$P(A) = \frac{\text{número de maneras en que } \varepsilon \text{ puede ocurrir favorable a } A}{\text{número total de maneras en que } \varepsilon \text{ puede ocurrir}}.$$

Es importante comprender que la expresión anterior de $P(A)$ es sólo una consecuencia de la suposición de que todos los resultados son igualmente probables y sólo es aplicable cuando se satisface esta suposición. Sin duda no sirve como una definición general de probabilidad.

EJEMPLO 2.2. Se lanza un dado y se supone que todos los resultados son igualmente probables. El evento A ocurre si y sólo si aparece un número mayor que 4. Esto es, $A = \{5,6\}$. Por lo tanto, $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$.

EJEMPLO 2.3. Se lanza una moneda normal dos veces. Sea A el evento: {aparece una cara}. Para evaluar $P(A)$ un análisis del problema podría ser de la manera siguiente. El espacio muestral es $S = \{0,1,2\}$, donde cada uno de los resultados representa el número de caras que ocurren. Por lo tanto, $P(A) = \frac{1}{3}$! Este análisis es obviamente incorrecto, puesto que en el espacio muestral antes considerado, todos los resultados *no* son igualmente probables. A fin de aplicar el método anterior deberíamos considerar, en su lugar, el espacio muestral $S' = \{CC, CS, SC, SS\}$. En este espacio muestral todos los resultados son igualmente probables y, por lo tanto, obtenemos para la solución correcta de nuestro problema, $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Podríamos emplear en forma correcta el espacio muestral S como sigue: los resultados 0 y 2 son igualmente posibles, mientras que el resultado 1 es probablemente el doble de cada uno de los otros. Por lo tanto, $P(A) = \frac{1}{2}$, lo cual concuerda con la respuesta anterior.

Este ejemplo ilustra dos puntos. Primero, debemos estar seguros por completo de que todos los resultados que se pueden suponer son igualmente probables antes de utilizar el procedimiento anterior. Segundo,

a menudo podemos reducir el problema a uno, en el cual todos los resultados *son* igualmente posibles, mediante una elección apropiada del espacio muestral. Cada vez que sea posible se debe hacer esto, puesto que en general simplifica los cálculos. En ejemplos subsecuentes se tratará nuevamente este punto.

Muy a menudo la manera como se realiza un experimento determina si los resultados son o no igualmente probables. Por ejemplo, supongamos que vamos a escoger un perno de una caja que contiene tres de tamaño diferente. Si elegimos el perno acercándonos a la caja y sacamos el primero que tocamos, es obvio que el perno más grande tendrá una probabilidad mayor de ser escogido que la de los otros dos. Sin embargo, si rotulamos con cuidado cada perno con un número escrito en una etiqueta, y elegimos una de ellas, se puede asegurar que cada perno, de hecho, tiene la misma probabilidad de ser escogido. Así quizás tengamos que afrontar considerables dificultades para asegurarnos que la suposición matemática de resultados igualmente probables es de hecho apropiada.

En ejemplos anteriores y muchos otros subsecuentes, nos interesa la elección al azar de uno o más objetos de una colección dada. Definamos con mayor precisión esta noción. Supongamos que tenemos N objetos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

a) Escoger al azar un objeto de los N objetos, significa que cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ser elegido. Esto es,

$$\text{Prob (elegir } a_i) = 1/N, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

b) Escoger al azar dos objetos entre N objetos significa que *cada uno de los pares* de objetos (sin considerar el orden) tiene la misma probabilidad de ser escogido que cualquier otro par. Por ejemplo, si debemos elegir dos objetos al azar de (a_1, a_2, a_3, a_4), y luego obtener a_1 y a_2 es tan probable como obtener a_2 y a_3, etc. Esta afirmación nos lleva de inmediato a la cuestión de *cuántos* pares diferentes hay. Supongamos que hay K de tales pares. Entonces, la probabilidad de cada par sería $1/K$. Muy pronto aprenderemos a calcular K.

c) Escoger al azar n objetos ($n \leq N$) entre N objetos significa que cada n-tupla, digamos $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, tiene tantas probabilidades de ser elegida como cualquier otra n-tupla.

Observación: Anteriormente ya sugerimos que se debe tener mucho cuidado en la parte experimental para asegurar que la suposición matemática de "escoger al azar" se cumpla.

175991

2.3 Métodos de enumeración

Tenemos que hacer una digresión a fin de aprender cómo enumerar. Nuevamente consideraremos la forma anterior de $P(A)$, llamada $P(A) = r/k$, donde k es el número total de maneras en que ε puede ocurrir, mientras que r es igual al número de maneras en que A puede ocurrir. En los ejemplos presentados hasta ahora, se encontró poca dificultad para calcular r y k. Pero es necesario considerar situaciones ligeramente más complicadas para apreciar la necesidad de contar sistemáticamente o de procedimientos de enumeración.

EJEMPLO 2.4. Un lote de 100 artículos contiene 20 defectuosos y 80 no defectuosos. Se eligen 10 artículos al azar, sin sustituir un artículo antes de elegir el próximo. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de los artículos escogidos sean defectuosos?

Para analizar este problema, consideremos el siguiente espacio muestral S. Cada uno de los elementos de S consta de 10 artículos posibles del lote, digamos $(i_1, i_2, \ldots, i_{10})$. ¿Cuántos hay de tales resultados? Y entre estos resultados, ¿cuántos tienen la característica de que exactamente la mitad sean defectuosos? Evidentemente necesitamos saber la respuesta a tales interrogantes para resolver el problema propuesto. Muchos problemas similares dan origen a preguntas análogas. En las próximas secciones presentaremos algunos procedimientos sistemáticos de enumeración.

A. Principio de multiplicación. Supongamos que un procedimiento, designado como 1, puede hacerse de n_1 maneras. Supongamos que un segundo procedimiento, designado como 2, se puede hacer de n_2 maneras. También supongamos que cada una de las maneras de efectuar 1 puede ser seguida por cualquiera de las maneras de efectuar 2. Entonces el procedimiento que consta de 1 seguido por 2 se puede hacer de $n_1 n_2$ maneras.

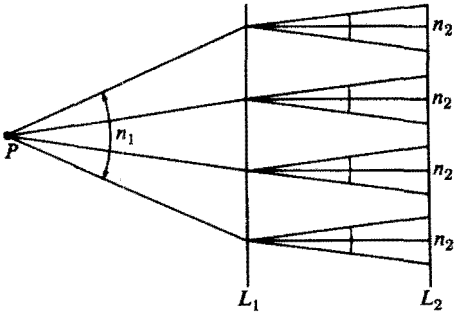


FIGURA 2.1

Para indicar la validez de este principio es más sencillo considerar el siguiente planteamiento esquemático. Consideraremos un

punto P y dos rectas, digamos L_1 y L_2. El procedimiento 1 consiste en ir de P a L_1, mientras que el procedimiento 2 consiste en ir de L_1 a L_2. La figura 2.1 indica cómo se obtiene el resultado final.

Observación: Obviamente este principio puede extenderse a cualquier número de procedimientos. Si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer de n_i maneras, $i = 1, 2, \ldots, k$ entonces el procedimiento que consiste en 1, seguido por 2,..., seguido por el procedimiento k puede hacerse de $n_1 n_2 \ldots n_k$ maneras.

EJEMPLO 2.5. Un artículo manufacturado debe pasar por tres controles. En cada uno de ellos se inspecciona una característica particular del artículo y se le marca de conformidad. En el primer control hay tres mediciones posibles, mientras que en cada uno de los dos últimos controles hay cuatro mediciones posibles. Por lo tanto, hay $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$ maneras de marcar el artículo.

B. Principio de adición. Supongamos que un procedimiento, designado con 1, se puede hacer de n_1 maneras. Supongamos que un segundo procedimiento, designado con 2, se puede hacer de n_2 maneras. Supongamos además que *no* es posible que *ambos*, 1 y 2, se hagan juntos. Entonces, el número de maneras como se puede hacer 1 o 2 es $n_1 + n_2$.

Usemos otra vez el planteamiento esquemático para convencernos de la validez del principio de adición, como se indica en la figura 2.2.

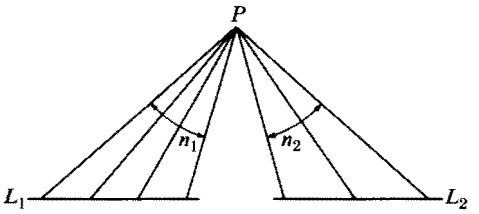
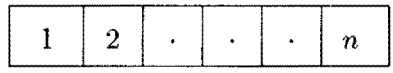


FIGURA 2.2

Observación: También este principio puede generalizarse como sigue: si hay k procedimientos y el i-ésimo procedimiento se puede hacer en n_i maneras, $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces el número de maneras como podemos hacer el procedimiento 1, o el procedimiento 2 $o \cdots o$ el procedimiento k está dado por $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, suponiendo que los procedimientos no se pueden realizar en forma conjunta.

EJEMPLO 2.6. Supongamos que planeamos un viaje y debemos decidir entre transportarnos por autobús o por tren. Si hay tres rutas para el autobús y dos para el tren, entonces hay 3 + 2 = 5 rutas diferentes disponibles para el viaje.

C. Permutaciones. *a*) Supongamos que tenemos n objetos diferentes. ¿De cuántas maneras, digamos ${}_nP_n$, se pueden agrupar (permutar) estos objetos? Por ejemplo, si tenemos los objetos a, b y c, podemos considerar las siguientes agrupaciones: abc, acb, bac, bca, cab y cba. Así, la respuesta es seis. En general, consideremos el esquema siguiente. Agrupar los n objetos es equivalente a ponerlos, en algún orden específico, en una caja con n compartimientos.



La primera casilla se puede llenar de cualquiera de las n maneras, la segunda de cualquiera de las $(n-1)$ maneras, ..., y la última casilla de sólo una manera. Por tanto, aplicando el principio de multiplicación anterior, vemos que la caja se puede llenar de $n(n-1)(n-2)\ldots 1$ maneras. Este número ocurre tan a menudo en matemáticas que presentamos un nombre y un símbolo especiales para él.

Definición. Si n es un entero positivo, definimos $n! = (n)(n-1)(n-2)\cdots 1$ y lo llamamos *n-factorial.* También definimos $0! = 1$.

Así, el número de permutaciones de n objetos diferentes está dado por

$$ {}_nP_n = n! $$

b) De nueva cuenta consideremos n objetos *diferentes*. Esta vez deseamos escoger r de esos objetos, $0 \leq r \leq n$, y permutamos el r elegido. Indiquemos el número de manera de hacerlo con ${}_nP_r$. Recurrimos otra vez al esquema anterior de llenar una caja que tiene n compartimientos; ahora nos detenemos después que se ha llenado el compartimiento r-ésimo. Así, el primer compartimiento puede llenarse de n maneras, el segundo de $(n-1)$ maneras,..., y el r-ésimo compartimiento de $n-(r-1)$ maneras. Así se puede realizar el procedimiento completo, usando de nuevo el principio de multiplicación, de

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

maneras. Usando la notación factorial presentada anteriormente, podemos escribir

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$ *

D. Combinaciones. Consideremos nuevamente n objetos diferentes. Esta vez estamos interesados en contar el número de maneras como podemos escoger r de esos n objetos *sin* considerar el orden. Por ejemplo, tenemos los objetos a, b, c y d, y $r = 2$; deseamos contar ab, ac, ad, bc, bd y cd. En otras palabras, *no* contamos ab y ba puesto que los mismos objetos están relacionados y sólo difiere el orden.

Para obtener el resultado general recordemos la fórmula derivada anteriormente: el número de maneras de elegir r objetos entre n y permutar los r elegidos es igual a $n!/(n-r)!$ Sea C el número de maneras de elegir r entre n, sin considerar el orden. (Esto es, el número buscado es C.) Observe que una vez que se han escogido los r artículos, hay $r!$ maneras de permutarlos. Por tanto, aplicando una vez más el principio de multiplicación, junto con el resultado anterior, obtenemos

$$Cr! = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Así, el número de maneras de elegir r entre n objetos diferentes, sin considerar el orden, está dado por

$$C = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Este número aparece en muchos contextos en matemáticas y, por lo tanto, se emplea un símbolo especial para designarlo. Escribiremos

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}.$$

---

* *N. del T.* Esta expresión también se conoce como arreglo o variación.

Para nuestros propósitos, $\binom{n}{r}$ se define sólo si n es un entero positivo y si r es un entero $0 \leq r \leq n$. Sin embargo, podemos definir $\binom{n}{r}$ muy ampliamente para cualquier número real n y para cualquier entero no negativo r como sigue:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Los números $\binom{n}{r}$ a menudo se llaman *coeficientes binomiales* porque aparecen como coeficientes en el desarrollo de la expresión binomial $(a + b)^n$. Si n es un entero positivo, $(a + b)^n = (a + b)(a + b)\cdots(a + b)$. Cuando se efectúa la multiplicación, cada uno de los términos consistirá en el producto de k $a$es y de $(n - k)$ $b$es, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. ¿Cuántos términos serán de la forma $a^k b^{n-k}$? Contemos simplemente el número de maneras como podemos elegir k entre n $a$es, sin considerar el orden. Pero esto está dado precisamente por $\binom{n}{k}$. Así, tenemos lo que se conoce como *teorema del binomio*.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{2.2}$$

Los números $\binom{n}{r}$ tienen muchas propiedades interesantes de las cuales aquí solo mencionaremos dos. (A no ser que se indique otra cosa, suponemos que n es un entero positivo y r un entero, $0 \leq r \leq n$.)

$$a) \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r},$$

$$b) \quad \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

Es muy fácil verificar algebraicamente las dos identidades anteriores. Sólo escribimos, en cada uno de los casos, el lado izquierdo y derecho de las identidades anteriores y notamos que son iguales.

Sin embargo, hay otro método de verificar esas identidades que hace uso de la interpretación que hemos dado a $\binom{n}{r}$ a saber, el número de maneras de escoger r entre n objetos.

a) Cuando escogemos r entre n objetos en forma simultánea "dejamos atrás" $(n - r)$ objetos y, por tanto, escoger r de n es equivalente a elegir

$(n - r)$ de n. Ésta es precisamente la primera proposición que se debe verificar.

b) Escojamos cualquiera de los n objetos, digamos el primero, a_1. Al elegir r objetos, a_1 está incluido o excluido, pero no las dos cosas. Por tanto, al contar el número de maneras como podemos escoger r objetos, podemos aplicar el principio de adición antes tratado.

Si a_1 está excluida, debemos escoger los r objetos que se desean de los $(n - 1)$ objetos restantes y hay $\binom{n-1}{r}$ maneras de hacer esto.

Si a_1 va a incluirse, sólo $(r - 1)$ objetos más deben escogerse de los restantes $(n - 1)$ objetos y esto se puede hacer de $\binom{n-1}{r-1}$ maneras. Así, el número pedido es la *suma* de esos dos, lo que verifica la segunda identidad.

Observación: En lo expuesto anteriormente, los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ son significativos sólo si n y k son enteros no negativos con $0 \leq k \leq n$. Sin embargo, si escribimos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

observamos que la última expresión es significativa si n es *cualquier* número real y k es cualquier entero no negativo. Así,

$$\binom{-3}{5} = \frac{(-3)(-4)\cdots(-7)}{5!},$$

y así sucesivamente.

Utilizando esta versión extendida de los coeficientes binomiales, podemos expresar la *forma generalizada del teorema del binomio:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

Esta serie es significativa para cualquier n real y para todas las x tales que $|x| < 1$. Observemos que si n es un entero positivo, la serie infinita se reduce a un número finito de términos, puesto que en ese caso $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

EJEMPLO 2.7. *a*) ¿Cuántos comités de tres miembros se pueden elegir con ocho personas? Puesto que dos comités son iguales si están formados por los mismos miembros (sin considerar el orden en el cual fueron elegidos), tenemos $\binom{8}{3} = 56$ comités posibles.

b) ¿Cuántas señales con tres banderas se pueden obtener con ocho banderas diferentes? Este problema es muy parecido al anterior. Sin embargo, aquí el orden constituye una diferencia y, por lo tanto, obtenemos $8!/5! = 336$ señales.

c) Un grupo de ocho personas consta de cinco hombres y tres mujeres. ¿Cuántos comités de tres personas pueden formarse con dos hombres exactamente? Aquí debemos hacer dos cosas: escoger dos hombres (entre cinco) y escoger una mujer (entre tres). Así obtenemos el número pedido $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{1} = 30$ comités.

d) Ahora podemos verificar una proposición antes formulada, a saber, el número de subconjuntos de un conjunto que tiene n elementos es 2^n (contando el conjunto vacío y el conjunto mismo). Simplemente clasificamos cada elemento con un uno o con un cero, sea que el elemento vaya a ser incluido o excluido en el subconjunto. Hay dos maneras de clasificar cada uno de los elementos, y hay n elementos. Luego, el principio de multiplicación nos dice que hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$ clasificaciones posibles. Pero cada una de las clasificaciones en particular representa una elección de un subconjunto. Por ejemplo, $(1, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0)$ consistiría en el subconjunto formado por a_1 y a_2 precisamente. De nuevo, $(1, 1, \cdots, 1)$ representaría S y $(0, 0, \cdots, 0)$ representaría al conjunto vacío.

e) Podemos obtener el resultado anterior usando el principio de adición como sigue. Para obtener subconjuntos debemos escoger el conjunto vacío, los subconjuntos que constan de sólo un elemento, los que constan de sólo 2 elementos,..., y el conjunto mismo que consta de todos los n elementos. Esto se puede hacer de

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

maneras. Sin embargo, la suma de esos coeficientes binomiales es simplemente el desarrollo de $(1 + 1)^n = 2^n$.

Ahora volvamos al ejemplo 2.4. De un lote que consta de 20 artículos defectuosos y 80 artículos no defectuosos escogemos 10 al azar (sin sustitución). El número de maneras de hacer esto es $\binom{100}{10}$. Por tanto, la probabilidad de encontrar 5 artículos defectuosos y 5 no defectuosos entre los 10 elegidos está dada por

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}}.$$

Mediante logaritmos de factoriales (que están tabulados) se puede evaluar lo anterior y es igual a 0.021.

EJEMPLO 2.8. Generalicemos el problema anterior. Supóngase que tenemos N artículos. Si elegimos n de esos al azar, sin sustitución, hay $\binom{N}{n}$ muestras posibles diferentes, todas las cuales tienen la misma probabilidad de ser escogidas. Si los N artículos están formados de r_1 A's y r_2 B's (con $r_1 + r_2 = N$) entonces la probabilidad de que los n artículos elegidos contengan exactamente s_1 A's y $(n - s_1)$ B's está dada por.

$$\frac{\binom{r_1}{s_1}\binom{r_2}{n-s_1}}{\binom{N}{n}}.$$

(La anterior se llama *probabilidad hipergeométrica* y se encontrará más adelante.)

Observación: Es muy importante especificar, cuando hablamos de escoger artículos al azar, si lo hacemos *con* o *sin sustitución*. En una descripción más realista propondremos esta última. Por ejemplo, cuando inspeccionamos un número de artículos manufacturados con el propósito de descubrir cuántos defectuosos podría haber, en general, no pretendemos inspeccionar el mismo artículo dos veces. Previamente hemos observado que el número de maneras de escoger r objetos entre n, sin considerar el orden, está dado por $\binom{n}{r}$. El número de maneras de escoger r artículos entre n, con sustitución, está dado por n^r. Aquí *estamos* interesados en el orden en que se escogieron los artículos.

EJEMPLO 2.9. Supóngase que escogemos dos objetos al azar entre cuatro objetos clasificados a, b, c y d.

a) Si escogemos sin sustitución, el espacio muestral S se puede representar como sigue:

$$S = \{(a,b);(a,c);(b,c);(b,d);(c,d);(a,d)\}.$$

Hay $\binom{4}{2} = 6$ resultados posibles. Cada uno de los resultados individuales indica sólo *cuáles* fueron los dos objetos escogidos y *no* el orden en que se escogieron.

b) Si escogemos con sustitución el espacio muestral S' se puede representar como sigue:

$$S' = \left\{ \begin{matrix} (a,a);(a,b);(a,c);(a,d);(b,a);(b,b);(b,c);(b,d); \\ (c,a);(c,b);(c,c);(c,d);(d,a);(d,b);(d,c);(d,d) \end{matrix} \right\}.$$

Hay $4^2 = 16$ resultados posibles. Aquí cada uno de los resultados individuales indica cuáles objetos se escogieron y el orden de selección. Escoger al azar implica que si elegimos sin sustitución, todos los resultados en S son de igual forma probables, mientras que si escogemos con sustitución, entonces todos los resultados en S' son igualmente probables. Así, si A es el evento {el objeto c es elegido}, entonces tenemos de S, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ si escogemos sin sustitución, y de S', $P(A) = \frac{7}{16}$ si escogemos con sustitución.

E. Permutaciones cuando no todos los objetos son diferentes. En todos los métodos de enumeración presentados hemos supuesto que todos los objetos considerados eran diferentes (esto es, distinguibles). Sin embargo, no siempre este es el caso.

Supongamos, entonces, que tenemos n objetos tales que hay n_1 de una clase, n_2 de una segunda clase,..., n_k de una k-ésima clase, donde $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Entonces, el número de permutaciones de estos n objetos está dada por

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

La deducción de esta fórmula se deja al lector. Nótese que si todos los objetos *son* diferentes, tenemos $n_i = 1, i = 1, 2, \ldots, k$, y, por tanto, la fórmula anterior se reduce a $n!$, el resultado obtenido en forma previa.

Observación: Insistimos una vez más en que la asignación real de probabilidades a los resultados individuales de un espacio muestral (o a una colección de resultados, es decir, un evento) es algo que no puede obtenerse matemáticamente; debe obtenerse de otras consideraciones. Por ejemplo, podemos utilizar ciertas características de simetría del experimento para comprobar que todos los resultados son igualmente probables. De nuevo podemos hacer un procedimiento de muestreo (por ejemplo, escoger uno o varios individuos de una

población especificada) de tal manera que sea razonable suponer que todas las elecciones son igualmente probables. En muchos otros casos, cuando ninguna suposición básica es apropiada, debemos recurrir al planteamiento de la frecuencia relativa. Repetimos n veces el experimento y calculamos la proporción de veces que ha ocurrido el resultado (o evento) que se considera. Al usar ésta como una aproximación, sabemos que es muy improbable que esta frecuencia relativa se diferencie de la probabilidad "verdadera" (cuya existencia ha sido especificada por nuestro modelo teórico) en una cantidad apreciable si n es suficientemente grande. Cuando es imposible hacer suposiciones razonables acerca de la probabilidad de un resultado y también es imposible repetir el experimento un gran número de veces (debido al costo o a consideraciones de tiempo, por ejemplo) en realidad es poco significativo proseguir con un estudio probabilístico del experimento, excepto sobre una base completamente teórica. (Para una nota adicional sobre el mismo tema, véase la Sec. 4.8.)

PROBLEMAS

2.1. En una habitación se encuentra el siguiente grupo de personas: 5 hombres mayores de 21, 4 hombres menores de 21, 6 mujeres mayores de 21 y 3 mujeres menores de 21. Se elige una persona al azar. Se definen los eventos siguientes: $A = \{\text{la persona es mayor de 21}\}$; $B = \{\text{la persona es menor de 21}\}$; $C = \{\text{la persona es hombre}\}$; $D = \{\text{la persona es mujer}\}$. Evaluar lo siguiente.

a) $P(B \cup D)$
b) $P(A^c \cap C^c)$

2.2. En una habitación 10 personas tienen insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen tres personas al azar y se les pide que dejen la habitación simultáneamente y se anotan los números de las insignias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias sea 5?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

2.3. *a*) Supóngase que se escriben tres dígitos 1, 2 y 3 en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dígito ocupe su lugar propio?
b) Lo mismo que *a*) con los dígitos 1, 2, 3 y 4.
c) Lo mismo que *a*) con los dígitos $1, 2, 3, \ldots, n$. [Sugerencia: Usar (1.7).]
d) Discutir la respuesta de *c*) si n es grande.

2.4. Un cargamento de 1500 lavadoras contiene 400 defectuosas y 1100 no defectuosas. Se eligen al azar 200 lavadoras (sin sustitución) y se clasifican.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren exactamente 90 artículos defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren al menos 2 artículos defectuosos?

175991

2.5. Diez fichas numeradas del 1 al 10 se mezclan en una palangana. Se sacan de la palangana dos fichas numeradas (X, Y) una y otra vez sin sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y = 10$?

2.6. Un lote consta de 10 artículos sin defecto, 4 con pequeños defectos y 2 con defectos graves. Se elige un artículo al azar. Encontrar la probabilidad de que:

a)) no tenga defectos,
b) no tenga defecto grave,
c) que no tenga defecto o que tenga un defecto grave.

2.7. Si del mismo lote de artículos descritos en el problema 2.6 se escogen dos artículos (sin sustitución), encontrar la probabilidad de que:

a) ambos sean buenos,
b) ambos tengan defectos graves,
c) a lo menos uno sea bueno,
d) a lo más uno sea bueno,
e) exactamente uno sea bueno,
f) ninguno tenga defectos graves,
g) ninguno sea bueno.

2.8. Un producto se arma en tres etapas. En la primera etapa hay 5 líneas de armado, en la segunda, 4 líneas de armado y en la tercera, 6 líneas de armado. ¿De cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de armado?

2.9. Un inspector visita 6 máquinas diferentes durante el día. A fin de impedir que los operadores sepan cuándo inspeccionará, varía el orden de las visitas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

2.10. Un mecanismo complejo puede fallar en 15 partes diferentes. Si falla en 3 partes ¿de cuántas maneras puede suceder?

2.11. Hay 12 maneras en las cuales un artículo manufacturado puede tener un pequeño defecto y 10 maneras en las cuales puede tener un defecto mayor. ¿De cuántas maneras puede ocurrir un defecto menor y uno mayor? ¿2 defectos menores y 2 defectos mayores?

2.12. Un mecanismo puede ponerse en cuatro posiciones, digamos a, b, c y d. Hay 8 de tales mecanismos en un sistema.

a) ¿De cuántas maneras puede instalarse este sistema?
b) Supóngase que dichos mecanismos están instalados en algún orden (lineal) preasignado. ¿De cuántas maneras posibles se instalan los mecanismos, si dos mecanismos adyacentes no están en la misma posición?
c) ¿Cuántas maneras son posibles si sólo se usan las posiciones a y b con la misma frecuencia?
d) ¿Cuántas maneras son posibles si sólo se usan dos posiciones diferentes y una de ellas aparece tres veces más a menudo que la otra?

2.13. Supóngase que de N objetos se eligen n al azar, con sustitución. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún objeto sea elegido más de una vez? (Supóngase que $n < N$.)

2.14. Con las letras a, b, c, d, e y f, ¿cuántas palabras clave de 4 letras se pueden formar, si

a) ninguna letra se puede repetir?
b) cualquier letra se puede repetir cualquier número de veces?

2.15. Supóngase que $\binom{99}{5} = a$ y $\binom{99}{4} = b$. Exprese $\binom{100}{95}$ en términos de a y b. [*Sugerencia: No* se calculen las expresiones anteriores para resolver este problema.]

2.16. Una caja contiene esferas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Se escogen dos esferas al azar. Encontrar la probabilidad de que los números sobre las esferas sean enteros consecutivos, si

a) las esferas se escogen sin sustitución,
b) las esferas se escogen con sustitución.

2.17. ¿Cuántos subconjuntos que contengan al menos un elemento se pueden formar de un conjunto de 100 elementos?

2.18. Entre los números $1, 2, \ldots 50$ se escoge uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible entre 6 o entre 8?

2.19. De 6 números positivos y 8 números negativos se eligen 4 números al azar (sin sustitución) y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

2.20. Cierta sustancia química se forma mezclando 5 líquidos distintos. Se propone verter un líquido en un estanque y agregar sucesivamente los otros líquidos. Todas las combinaciones posibles se deben probar para establecer cuál da mejor resultado. ¿Cuántas pruebas deben hacerse?

2.21. Un lote contiene n artículos. Si se sabe que r artículos son defectuosos y se inspeccionan al azar y en forma sucesiva, ¿cuál es la probabilidad de que el k-ésimo artículo ($k \geq r$) inspeccionado sea el último defectuoso en el lote?

2.22. r números ($0 < r < 10$) se escogen al azar con sustitución entre los números $0, 1, 2, \ldots, 9$. ¿Cuál es la probabilidad de que dos no sean iguales?

3

Probabilidad condicional e independencia

3.1 Probabilidad condicional

Consideremos de nuevo la diferencia que existe entre elegir al azar un artículo de un lote con o sin sustitución. En el ejemplo 2.4, el lote tenía la siguiente composición: 80 artículos sin defectos y 20 defectuosos. Supóngase que elegimos dos artículos: *a*) con sustitución y *b*) sin sustitución.

Definamos los eventos siguientes:

$$A = \{\text{el primer artículo es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el segundo artículo es defectuoso}\}.$$

Si escogemos *con* sustitución, $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Cada vez que elegimos, en el lote hay 20 artículos defectuosos de un total de 100. Sin embargo, si elegimos *sin* sustitución, los resultados no son totalmente inmediatos. Todavía es verdad, por supuesto, que $P(A) = \frac{1}{5}$. Pero, ¿cuál es el valor de $P(B)$? Es evidente que con el propósito de calcular $P(B)$ deberíamos conocer la composición del lote *cuando se escoge el*

segundo artículo. En otras palabras, deberíamos saber si el evento A ocurrió o no. Este ejemplo indica la necesidad de presentar el siguiente concepto importante.

Sean A y B dos eventos asociados con un experimento ε. Indiquemos con $P(B \mid A)$ la *probabilidad condicional* del evento B, *dado* que A ha ocurrido.

En el ejemplo anterior, $P(B \mid A) = \frac{19}{99}$. Porque si A ha ocurrido, entonces, al sacar por segunda vez, sólo quedan 99 artículos, de los cuales 19 son defectuosos.

Cada vez que calculamos $P(B \mid A)$, esencialmente estamos calculando $P(B)$ respecto al *espacio muestral reducido* A, en vez de espacio muestral original S. Consideremos el diagrama de Venn de la figura 3.1.

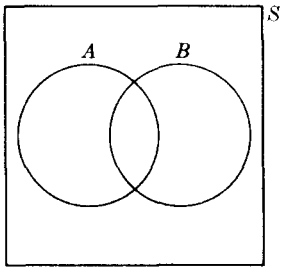


FIGURA 3.1

Cuando calculamos $P(B)$ nos preguntamos qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en S, y cuando evaluamos $P(B \mid A)$ nos preguntamos qué tan probable es que estemos en B, sabiendo que debemos estar en A. (Esto es, el espacio muestral se ha *reducido* de S a A.)

Pronto daremos una definición formal de $P(B \mid A)$. Por el momento, sin embargo, seguiremos con nuestra noción intuitiva de probabilidad condicional y consideraremos un ejemplo:

EJEMPLO 3.1. Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2), donde x_i es el resultado del i-ésimo dado, $i = 1, 2$. Por tanto, el espacio muestral S se puede representar por el siguiente arreglo de 36 resultados igualmente posibles:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{Bmatrix}.$$

Consideremos los dos eventos siguientes:

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}, \quad B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}.$$

Así $A = \{(5,5),(4,6),(6,4)\}$ y $B = \{(2,1),(3,1),(3,2),\ldots,(6,5)\}$. Por tanto, $P(A) = \frac{3}{36}$ y $P(B) = \frac{15}{36}$. Además, $P(B \mid A) = \frac{1}{3}$, ya que el espacio muestral es ahora A (que son tres resultados), y sólo uno de ellos es consistente con el evento B. De manera semejante, podemos calcular $P(A \mid B) = \frac{1}{15}$.

Finalmente, calculemos $P(A \cap B)$. El evento $(A \cap B)$ ocurre si y sólo si la suma de los dos dados es diez y el primer dado indica un valor mayor que el segundo. Solamente hay *un* resultado y, por tanto, $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Si observamos con cuidado los diversos números que antes hemos calculado, concluimos que se cumple lo siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Sucede que esas relaciones no sólo aparecen en los ejemplos particulares que hemos considerado, sino que son completamente generales y nos dan un medio de *definir formalmente* la probabilidad condicional.

Para justificar esta definición, volvamos al concepto de frecuencia relativa. Supongamos que un experimento ε se ha repetido n veces. Sean n_A, n_B, y $n_{A\cap B}$ el número respectivo de veces que los eventos A, B y $A \cap B$ han ocurrido en las n repeticiones. ¿Cuál es el significado de $n_{A\cap B}/n_A$? Representa la frecuencia relativa de B entre esos resultados en los que A ocurrió. Esto es, $n_{A\cap B}/n_A$ es la frecuencia relativa condicional de B, dado que A ocurrió.

Podemos escribir $n_{A\cap B}/n_A$ como sigue:

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_A/n} = \frac{f_{A\cap B}}{f_A}$$

donde $f_{A\cap B}$ y f_A son las frecuencias relativas de los eventos $A \cap B$ y A, respectivamente. Como ya hemos indicado (y demostraremos más adelante), si n, el número de repeticiones es grande, $f_{A\cap B}$ estará cercana a $P(A \cap B)$ y f_A estará cercana a $P(A)$. Por lo tanto, la relación anterior sugiere que $n_{A\cap B}/n_A$ estará cercana a $P(B \mid A)$. Así, hacemos la siguiente definición formal:

Definición.

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{dado que} \quad P(A) > 0. \tag{3.1}$$

Observaciones: *a*) Es importante darse cuenta de que lo anterior no es un teorema (no demostramos nada), ni un axioma. Simplemente presentamos la noción intuitiva de probabilidad condicional y luego hicimos la definición formal de lo que entendemos por esta noción. El hecho de que nuestra definición formal corresponda a nuestra noción intuitiva está comprobado por el párrafo que precede a la definición.

b) Es muy sencillo comprobar que $P(B \mid A)$ para un valor de A fijo satisface los diversos postulados de la probabilidad, ecuación (1.3). (Véase el Prob. 3.22.) Esto es, tenemos:

$$
\begin{aligned}
&1')\ 0 \leq P(B \mid A) \leq 1,\\
&2')\ P(S \mid A) = 1,\\
&3')\ P(B_1 \cup B_2 \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) \quad \text{si} \quad B_1 \cap B_2 = \emptyset, \qquad (3.2)\\
&4')\ P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) + \cdots \quad \text{si} \quad B_i \cap B_j = \emptyset \\
&\quad \text{para } i \neq j.
\end{aligned}
$$

c) Si $A = S, P(B \mid S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$.

d) Con cada evento $B \subset S$ podemos asociar dos números, $P(B)$, la probabilidad (no condicional) de B y $P(B \mid A)$, la probabilidad condicional de B, dado que algún evento A (para el cual $P(A) > 0$) ha ocurrido. En general, esas dos medidas de probabilidad asignarán probabilidades distintas al evento B, como se indicó en los ejemplos precedentes. En breve estudiaremos un importante caso especial, en el cual $P(B)$ y $P(B \mid A)$ son la misma.

e) Nótese que la probabilidad condicional está definida en términos de la medida de probabilidad no condicional P. Esto es, si conocemos $P(B)$ para cada $B \subset S$ podemos calcular $P(B \mid A)$ para cada $B \subset S$.

Así tenemos dos maneras de calcular la probabilidad condicional $P(B \mid A)$:

a) En forma directa considerando la probabilidad de B respecto al espacio muestral reducido A.

b) Usando la definición anterior, donde $P(A \cap B)$ y $P(A)$ se calculan respecto al espacio muestral original S.

Observación: Si $A = S$, obtenemos $P(B \mid S) = P(B \cap S)/P(S) = P(B)$, puesto que $P(S) = 1$ y $B \cap S = B$. Así debe ser, porque decir que S ha ocurrido, sólo indica que el experimento se ha realizado.

EJEMPLO 3.2. Supóngase que en una oficina hay 100 máquinas calculadoras. Algunas de esas máquinas son eléctricas (E), mientras que otras son manuales (M). Además, algunas son nuevas (N), mientras las otras son usadas (U). La tabla 3.1 da el número de máquinas de cada

categoría. Una persona entra en la oficina, escoge una máquina al azar y descubre que es nueva. ¿Cuál es la probabilidad de que sea eléctrica? En términos de la notación presentada deseamos calcular $P(E \mid N)$.

TABLA 3.1

	E	M	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Sólo considerando el espacio muestral reducido N (es decir, las 70 máquinas nuevas), tenemos que: $P(E \mid N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$. Usando la definición de probabilidad condicional, tenemos que:

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}$$

La consecuencia más importante de la definición de probabilidad condicional anterior se obtiene escribiéndola de la manera siguiente:

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$$

lo que equivale a (3.3a)

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B).$$

Esto también se conoce como el *teorema de multiplicación* de probabilidades.

Podemos aplicar este teorema al cálculo de la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los dos eventos A y B.

EJEMPLO 3.3. Consideremos otra vez el lote analizado al principio de la sección 3.1, el cual consta de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos. Si escogemos 2 artículos al azar, sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?

Como antes, definimos los eventos A y B como sigue:

$A = \{\text{el primer artículo es defectuoso}\}$,

$B = \{\text{el segundo artículo es defectuoso}\}$.

Por lo tanto, necesitamos $P(A \cap B)$, que puede calcularse de acuerdo con la fórmula anterior, como $P(B \mid A)P(A)$. Pero $P(B \mid A) = \frac{19}{99}$, mientras que $P(A) = \frac{1}{5}$. Por lo tanto,

$$P(A \cap B) = \frac{19}{495}.$$

Observación: El anterior teorema de la multiplicación (3.3a) se puede generalizar a más de dos eventos de la siguiente manera:

$$P[A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n] = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1, A_2) \cdots P(A_n \mid A_1, \ldots, A_{n-1}) \tag{3.3b}$$

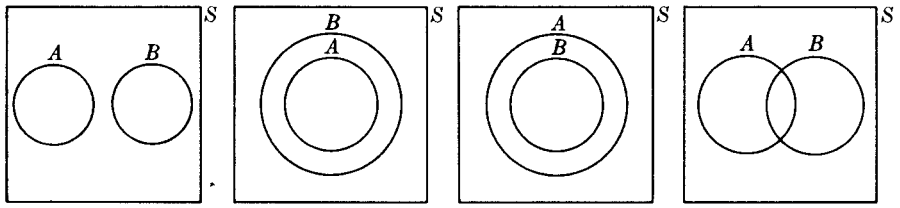
Por un momento considérese si podemos hacer una afirmación general de la magnitud relativa de $P(A \mid B)$ y $P(A)$. Consideremos los cuatro casos ilustrados con los diagramas de Venn en la figura 3.2. Tenemos:

a) $P(A \mid B) = 0 \leq P(A)$, puesto que A no puede ocurrir si B ha ocurrido.

b) $P(A \mid B) = P(A \cap B)/(P(B) = [P(A)/P(B)] \geq P(A)$, puesto que $0 \leq P(B) \leq 1$.

c) $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1 \geq P(A)$.

d) En este caso no podemos hacer ninguna afirmación acerca de la magnitud relativa de $P(A \mid B)$ y $P(A)$.



(a) $A \cap B = \emptyset$ (b) $A \subset B$ (c) $B \subset A$ (d) Ninguno de estos casos

FIGURA 3.2

Nótese que dos de los casos anteriores, $P(A) \leq P(A \mid B)$, en un caso, $P(A) \geq P(A \mid B)$ y en el cuarto caso no podemos hacer ninguna clase de comparaciones.

Anteriormente usamos el concepto de probabilidad condicional con el fin de evaluar la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los dos eventos. Para calcular la probabilidad de un solo evento A, podemos

aplicar este concepto de otra manera. Necesitamos la siguiente definición.

Definición. Decimos que los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ representan una *partición* del espacio muestral S si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda $i \neq j$.

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$.

c) $P(B_i) > 0$ para toda i.

En otras palabras, cuando se efectúa el experimento ε, ocurre *uno* y *sólo* uno de los eventos B_i.

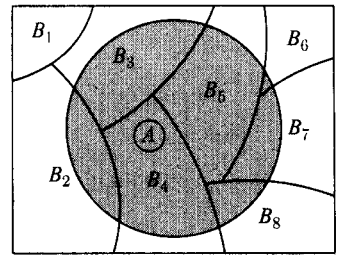


FIGURA 3.3

(Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representarían una partición del espacio muestral, mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no lo harían.)

Sea A algún evento respecto a S y sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición de S.

El diagrama de Venn de la figura 3.3 ilustra esto para $k = 8$. Por tanto, podemos escribir

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \cdots \cup A \cap B_k.$$

Por supuesto algunos de los conjuntos $A \cap B_j$ pueden ser vacíos, pero esto no invalida la anterior descomposición de A. Lo importante es que todos los eventos $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_k$ son parejas mutuamente excluyentes. Por lo tanto, podemos aplicar la propiedad aditiva para este tipo de eventos (Ec. 1.3) y escribir:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k).$$

Sin embargo, cada término $P(A \cap B_j)$ se puede expresar como $P(A \mid B_j)P(B_j)$ y, por lo tanto, obtenemos el llamado teorema de la *probabilidad total:*

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots + P(A \mid B_k)P(B_k). \quad (3.4)$$

Este resultado representa una relación muy útil, ya que cuando se busca $P(A)$ frecuentemente puede ser difícil calcularlo de manera directa. Sin embargo, con la información adicional de que B_j ha ocurrido, podemos calcular $P(A \mid B_j)$ y entonces usar la fórmula anterior.

EJEMPLO 3.4. Consideremos (por última vez) el lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, de los cuales escogemos dos artículos sin sustitución. Nuevamente definimos A y B:

$$A = \{\text{el primer artículo elegido es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{el segundo artículo elegido es defectuoso}\}.$$

ahora podemos calcular $P(B)$ como sigue:

$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A^c)P(A^c).$$

Usando uno de los cálculos ya hechos en el ejemplo 3.3, encontramos que

$$P(B) = \tfrac{19}{99} \cdot \tfrac{1}{5} + \tfrac{22}{99} \cdot \tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.$$

Este resultado puede ser un poco sorprendente, particularmente si el lector recuerda que al comienzo de la sección 3.1 encontramos que $P(B) = \frac{1}{5}$ cuando escogemos los artículos *con* sustitución.

EJEMPLO 3.5. Cierto artículo se manufactura en tres fábricas, digamos 1, 2 y 3. Se sabe que la primera produce el doble de artículos que la segunda y que ésta y la tercera producen el mismo número de artículos (durante un periodo de producción especificado). Se sabe también que el 2% de los artículos producidos por las dos primeras es defectuoso, mientras que el 4% de los manufacturados por la tercera es defectuoso. Todos los artículos producidos se colocan en una fila y se escoge uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que este artículo sea defectuoso?

Definamos los siguientes eventos:

$$A = \{\text{el artículo es defectuoso}\}, \qquad B_1 = \{\text{el artículo proviene de 1}\},$$

$$B_2 = \{\text{el artículo proviene de 2}\}, \qquad B_3 = \{\text{el artículo proviene de 3}\}.$$

175991

Nosotros necesitamos $P(A)$ y, usando el resultado anterior, podemos escribir:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3).$$

Ahora $P(B_1) = \frac{1}{2}$, mientras que $P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$. También $P(A \mid B_1) = P(A \mid B_2) = 0.02$, mientras que $P(A \mid B_3) = 0.04$. Poniendo sus valores en la expresión anterior obtenemos $P(A) = 0.025$.

Observación: Con el teorema de la probabilidad total, en química se ha observado la siguiente analogía. Supóngase que k matraces que contienen diferentes soluciones de la misma sal hacen un litro. Sea $P(B_i)$ el volumen del i-ésimo matraz y $P(A \mid B_i)$ la concentración de la solución en el i-ésimo matraz. Si combinamos todas las soluciones en un matraz y suponemos que $P(A)$ indica la concentración de la solución resultante, obtenemos:

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + \cdots + P(A \mid B_k)P(B_k).$$

3.2 Teorema de Bayes

Podemos usar el ejemplo 3.5 para demostrar otro resultado importante. Supongamos que del depósito se escoge un artículo y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se produjese en la primera fábrica?

Usando la notación antes presentada, necesitamos $P(B_1 \mid A)$. Podemos calcular esta probabilidad como una consecuencia de la siguiente. Sean $B_1, \ldots, B_k$ una partición del espacio muestral S y A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, podemos escribir:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\Sigma_{j=1}^{k} P(A \mid B_j)P(B_j)} \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.5}$$

Este resultado se conoce como *teorema de Bayes*. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas". Puesto que las B_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos B_i ocurre. (Esto es, *uno* de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno.) Por lo tanto, la fórmula anterior nos da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento A *ha* ocurrido. Para aplicar este teorema debemos conocer los valores de las $P(Bi)$. Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita la aplicabilidad del resultado.

Ha existido una considerable controversia acerca del teorema de Bayes, el cual en términos matemáticos es perfectamente correcto, sólo la elección impropia para $P(B_i)$ hace objetable el resultado.

Volviendo a la pregunta propuesta anteriormente y aplicando ahora la ecuación (3.5), obtenemos:

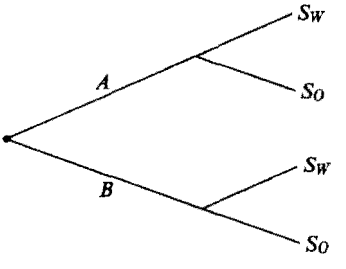
$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0.02)(1/2)}{(0.02)(1/2) + (0.02)(1/4) + (0.04)(1/4)} = 0.40.$$

Observación: Otra vez podemos encontrar en química una analogía con el teorema de Bayes. En k matraces tenemos soluciones de la misma sal, pero en concentraciones diferentes. Supongamos que el volumen total de la solución es un litro. Indicando el volumen de la solución en el i–ésimo matraz con $P(B_i)$ y la concentración de la sal en ese mismo matraz con $P(A \mid B_i)$, encontramos que la ecuación (3.5) da la proporción de la cantidad completa de sal encontrada en el i-ésimo matraz.

La siguiente ilustración del teorema de Bayes nos dará la oportunidad de introducir la idea de *diagrama de árbol*, método muy útil para analizar ciertos problemas.

Supóngase que varias cajas de caramelos son de dos tipos, digamos A y B. El tipo A contiene 70% de caramelos dulces y 30% de caramelos ácidos, mientras que en el tipo B dichos porcentajes están invertidos. Aún más, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A, mientras que el resto son del tipo B.

Ahora estamos ante el siguiente problema de decisión. Usted recibe una caja de dulces de tipo desconocido. Se le permite sacar una muestra de caramelo (una situación ciertamente no real, pero que nos permite presentar las ideas importantes sin mucha complicación y con esta información debe decir si cree que se le ha sido ofrecido el tipo A o el tipo B. El siguiente "diagrama de árbol" (llamado así por las diversas trayectorias o ramas que aparecen) nos ayudará a analizar el problema. (S_W y S_O indican la elección de un caramelo dulce o ácido, respectivamente.)



Hagamos unos cuantos cálculos:

$$P(A) = 0.6;\ P(B) = 0.4;\ P(S_W \mid A) = 0.7;$$

$$P(S_O \mid A) = 0.3;\ P(S_W \mid B) = 0.3;\ P(S_O \mid B) = 0.7.$$

Lo que en realidad deseamos saber es $P(A \mid S_W)$, $P(A \mid S_O)$, $P(B \mid S_W)$ y $P(B \mid S_O)$. Esto es, suponiendo que realmente escogimos un caramelo dulce, ¿qué decisión estaríamos más inclinados a hacer? Comparemos $P(A \mid S_W)$ y $P(B \mid S_W)$. Utilizando la fórmula de Bayes tenemos

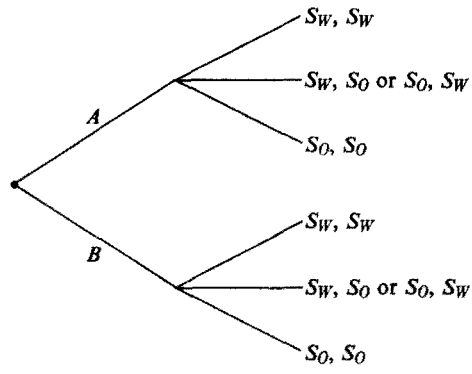
$$\begin{aligned} P(A \mid S_W) &= \frac{P(S_W \mid A)P(A)}{P(S_W \mid A)P(A) + P(S_W \mid B)P(B)} \\ &= \frac{(0.7)(0.6)}{(0.7)(0.6) + (0.3)(0.4)} = \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Un cálculo similar nos da $P(B \mid S_W) = 2/9$.

Así, con base en la evidencia que tenemos (es decir, la obtención de un caramelo dulce) es $3\frac{1}{2}$ veces más probable que se trate de una caja del tipo A que del tipo B. Por lo tanto, decidiríamos, posiblemente, que el caramelo se obtuvo de una caja tipo A. (Por supuesto, podríamos estar equivocados. Lo interesante del análisis anterior es que elegimos la alternativa que parece más probable con base en los pocos datos que tenemos.)

En términos del diagrama de árbol, lo que realmente necesitábamos (e hicimos) en los cálculos precedentes fue un análisis "hacia atrás". Esto es, dado lo que observamos, en este caso S_W, ¿qué tan probable era escoger el tipo A?

Una situación más interesante aparece si se nos permite elegir *dos* caramelos antes de decidir si es escogido el tipo A o el tipo B. En este caso, el diagrama de árbol aparecerá como sigue.



En el problema 3.26 se le pide a usted decidir de cuál de los dos tipos, A o B, está tomando muestras, según los tres resultados experimentales posibles que observa.

3.3 Eventos independientes

Hemos considerado dos eventos A y B que no pueden ocurrir de manera simultánea, esto es $A \cap B = \emptyset$. Tales eventos se designaron mutuamente excluyentes. Antes indicamos que si A y B son mutuamente excluyentes, entonces $P(A \mid B) = 0$, porque la ocurrencia de B impide la ocurrencia de A. Por otra parte, tenemos el caso, ya discutido anteriormente, en que $B \supset A$ y, por lo tanto, $P(B \mid A) = 1$.

En cada uno de los casos anteriores, sabiendo que B ocurrió, se nos dio una información precisa sobre la probabilidad de la ocurrencia de A. Sin embargo, hay muchos casos en los cuales se sabe que si un evento B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de A.

EJEMPLO 3.6. Supongamos que un dado normal se lanza dos veces. Definiremos los eventos A y B como sigue:

$$A = \{\text{el primer dado muestra un número par}\},$$

$$B = \{\text{el segundo dado muestra un 5 o un 6}\}.$$

Por intuición sabemos que los eventos A y B no están relacionados. Saber que B ocurre no proporciona información acerca de la ocurrencia de A. De hecho, el siguiente cálculo lo pone de manifiesto. Tomando

como nuestro espacio muestral los 36 resultados igualmente posibles del ejemplo 3.1, encontraremos que $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, mientras que $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Por lo tanto,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{3})} = \frac{1}{2}.$$

Así encontramos, como era de suponer, que la probabilidad no condicional es igual a la probabilidad condicional $P(A \mid B)$. De modo semejante

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{(\frac{1}{6})}{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{3} = P(B).$$

Por lo tanto, podríamos inclinarnos a decir que A y B son independientes si y sólo si $P(B \mid A) = P(A)$ y $P(B \mid A) = P(B)$. Aunque esto sería esencialmente apropiado, hay otro método que evita la dificultad encontrada aquí, a saber, que ambos, $P(A)$ y $P(B)$, deben ser diferentes de cero antes de que las igualdades anteriores sean significativas.

Consideremos $P(A \cap B)$, suponiendo que las probabilidades condicionales anteriores sean iguales a las probabilidades no condicionales correspondientes. Tenemos

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(A)P(B),$$
$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = P(B)P(A).$$

Así encontramos que, como ni $P(A)$ ni P(B) son iguales a cero, las probabilidades no condicionales son iguales a las probabilidades condicionales si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí hacemos la siguiente definición formal. [Si $P(A)$ o $P(B)$ es igual a cero, esta definición es aún válida.]

Definición. A y B son *eventos independientes* si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{3.6}$$

Observación: Esta definición es esencialmente equivalente a la que antes se sugirió, es decir, que A y B son independientes si $P(B \mid A) = P(B)$ y $P(A \mid B) = P(A)$. Esta última forma es un poco más intuitiva, porque afirma precisamente lo que hemos estado tratando de decir antes: A y B son

independientes si el conocimiento de la ocurrencia de A no influye de modo alguno en la probabilidad de la ocurrencia de B.

Que la definición formal adoptada también tiene cierto carácter intuitivo, puede verse al considerar el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.7. Veamos otra vez el ejemplo 3.2. Consideremos primero la tabla siguiente sólo con los valores marginales dados.

	E	M	
N			70
U			30
	60	40	100

Esto es, hay 60 máquinas eléctricas y 40 manuales. Del total, 70 son nuevas, mientras que 30 son usadas. Hay diversas maneras de colocar los datos en la tabla, consistentemente con los totales marginales dados. A continuación anotamos algunas de esas posibilidades.

	E	M	
N	60	10	70
U	0	30	30
	60	40	100

(a)

	E	M	
N	30	40	70
U	30	0	30
	60	40	100

(b)

	E	M	
N	42	28	70
U	18	12	30
	60	40	100

(c)

Consideremos la tabla *a*). Aquí *todas* las máquinas eléctricas son nuevas, y *todas* las usadas son manuales. Así hay una relación obvia (no necesariamente causal) entre las características de ser eléctricas y ser nuevas. De igual manera, en la tabla *b*) *todas* las máquinas manuales son nuevas y *todas* las usadas son eléctricas. Otra vez parece existir una relación definida entre esas características. Sin embargo, cuando observamos la tabla *c*), el panorama es muy diferente. Aquí no existe una relación aparente. Por ejemplo, el 60% de todas las máquinas son eléctricas. De modo semejante, el 70% de todas las máquinas son nuevas, y exactamente el 70% de las máquinas manuales son nuevas, etc. Así, no es evidente que las características de "ser nuevas" y "ser eléctricas" tengan alguna relación entre sí. Por supuesto, esta tabla se construyó precisamente de modo que exhiba esta propiedad. ¿Cómo se obtuvieron los datos de esta tabla? Simplemente aplicando la ecuación (3.6); es decir, como $P(E) = \frac{60}{100}$ y $P(N) = \frac{70}{100}$ debemos tener, por independencia, $P(E \cap N) = P(E)P(N) = \frac{42}{100}$. Por lo tanto, la colocación del dato en la tabla que indica el número de máquinas

eléctricas nuevas está dada por el número 42. Las otras ubicaciones se obtuvieron de un modo semejante.

En la mayor parte de las aplicaciones *supondremos* la independencia de los dos eventos A y B, y luego usaremos esta suposición para calcular $P(A \cap B)$, como $P(A)P(B)$. En general, las condiciones físicas en las cuales se realiza el experimento harán posible determinar si tal suposición se justifica o si al menos lo hace aproximadamente.

EJEMPLO 3.8. Consideremos un lote grande de artículos, digamos 10 000. Supongamos que el 10% de estos artículos es defectuoso y el 90% no. Se escogen dos artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos no sean defectuosos?

Definamos los eventos A y B así:

$$A = \{\text{primer artículo no es defectuoso}\},$$

$$B = \{\text{segundo artículo no es defectuoso}\}.$$

Si suponemos que el primer artículo se sustituye antes de elegir el segundo, entonces se puede suponer que los eventos A y B son independientes y, por tanto, $P(A \cap B) = (0.9)(0.9) = 0.81$. Sin embargo, en forma más real, el segundo artículo se escoge sin sustituir el primero. En este caso,

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \frac{8999}{9999}(0.9)$$

que es aproximadamente 0.81. Así, aunque A y B no son independientes en el segundo caso, la suposición de independencia que simplifica en forma considerable los cálculos sólo causa un error despreciable. (Recuerde el objetivo de un modelo matemático como el que se describió en la sección 1.1.) Si hubieran existido sólo pocos artículos en el lote, digamos 30, la suposición de independencia habría producido un gran error. Por esto es importante verificar con cuidado las condiciones en las cuales se realiza el experimento, a fin de establecer la validez de la suposición de independencia entre varios eventos.

EJEMPLO 3.9. Supóngase que un mecanismo está formado por dos componentes acoplados en serie, como se indica en la figura 3.4. Cada uno de ellos tiene una probabilidad p de no funcionar. ¿Cuál es la probabilidad de que el mecanismo funcione?

FIGURA 3.4

Es evidente que el mecanismo funcionará si y sólo si *ambos* componentes funcionan. Por tanto,

$$\text{Prob. (mecanismo funcione)} = \text{Prob. } (C_1 \text{ funcione y } C_2 \text{ funcione}).$$

La información que hemos dado no nos permite seguir, a menos que sepamos (o supongamos) que los dos mecanismos trabajan de manera independiente. Esta puede o no ser una suposición realista, que depende de cómo se acoplan las dos partes. Si suponemos que los dos mecanismos trabajan independientemente, para la probabilidad pedida obtenemos $(1-p)^2$.

Para nosotros será muy importante extender la noción de independencia a más de dos eventos. Consideremos primero tres eventos asociados con un experimento, digamos: A, B y C. Si A y B, A y C y B y C son *mutuamente* independientes (en el sentido antes dado), entonces no se deduce, en general, que no haya dependencia entre los tres eventos A, B y C. El siguiente ejemplo (algo artificial) ilustra este punto.

EJEMPLO 3.10. Supongamos que lanzamos dos dados. Definamos los eventos A, B y C como sigue:

$A = \{\text{el primer dado muestra un número par}\}$,

$B = \{\text{el segundo dado muestra un número impar}\}$,

$C = \{\text{ambos dados muestran números pares o números impares}\}$.

Tenemos $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. Aún más, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, los tres eventos son mutuamente independientes. Sin embargo, $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición. Decimos que los tres eventos, A, B y C, son *mutuamente independientes* si y sólo si *todas* las condiciones siguientes se mantienen:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \quad P(A \cap C) = P(A)P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C), \quad P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C). \tag{3.7}$$

Finalmente generalizaremos esta noción a n eventos en la siguiente definición.

Definición. Los n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y sólo si tenemos para $k = 2, 3, \ldots, n$,

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}). \tag{3.8}$$

(Hay $2^n - n - 1$ condiciones juntas anotadas; véase el Prob. 3.18.)

Observación: En la mayor parte de las aplicaciones no necesitamos verificar todas estas condiciones, ya que en general *suponemos* la independencia (con base en lo que sabemos acerca del experimento). Nosotros entonces usamos esta suposición para calcular, digamos: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$ como $P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

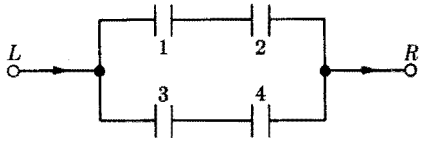


FIGURA 3.5

EJEMPLO 3.11. La probabilidad de cerrar cada uno de los relevadores del circuito que se indica en la figura 3.5 está dada por p. Si todos los relevadores funcionan independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que exista una corriente en los terminales I y D?

Sea A_i el evento que representa {relevador i está cerrado}, $i = 1, 2, 3, 4$. Sea E el evento que representa {la corriente pasa de I a D}. Por tanto, $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$. (Note que $A_1 \cap A_2$ y $A_3 \cap A_4$ *no* son mutuamente excluyentes.) Así,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

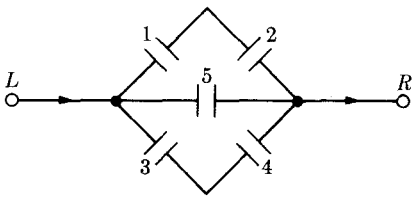


FIGURA 3.6

EJEMPLO 3.12. Supóngase otra vez que en el circuito de la figura 3.6 la probabilidad de que cada uno de los relevadores esté cerrado es p y que todos los relevadores funcionan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que exista una corriente entre los terminales I y D?

Usando la misma notación como en el ejemplo 3.11, tenemos que

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_5 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 = p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5. \end{aligned}$$

Para cerrar este capítulo indiquemos una solución muy común, pero errónea, del problema.

EJEMPLO 3.13. Suponga que entre seis pernos, dos son más cortos que una longitud específica. Si se escogen dos pernos al azar, ¿cuál es la probabilidad de escoger los dos más cortos? Sea A_i el evento {el i-ésimo perno elegido es corto}, $i = 1, 2$.

Por lo tanto, queremos evaluar $P(A_1 \cap A_2)$. La solución correcta se obtiene, naturalmente, al escribir

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{15}.$$

La solución común, pero *incorrecta*, es escribir:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{15}.$$

Por supuesto, lo importante es que aunque la respuesta es correcta, la identificación de $\frac{1}{5}$ con $P(A_2)$ es incorrecta; $\frac{1}{5}$ representa $P(A_2 \mid A_1)$. Para evaluar $P(A_2)$ en forma correcta, escribimos

$$P(A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) + P(A_2 \mid A_1^c)P(A_1^c) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{4}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

3.4 Consideraciones esquemáticas; probabilidad condicional e independencia

La solución esquemática siguiente puede ser útil para comprender el concepto de probabilidad condicional. Supóngase que A y B son dos eventos asociados con un espacio muestral, para el cual las distintas probabilidades se indican en el diagrama de Venn que aparece en la figura 3.7.

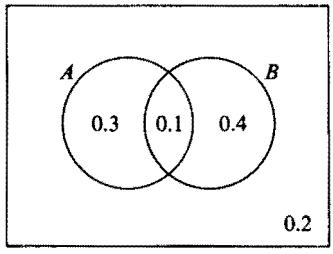


FIGURA 3.7

Por lo tanto, $P(A \cap B) = 0.1$, $P(A) = 0.1 + 0.3 = 0.4$ y $P(B) = 0.1 + 0.4 = 0.5$.

En seguida, representemos las diversas probabilidades con las *áreas* de los rectángulos como en la figura 3.8. En cada caso, las regiones sombreadas indican el evento B: en el rectángulo de la izquierda representamos $A \cap B$ y en el de la derecha $A' \cap B$.

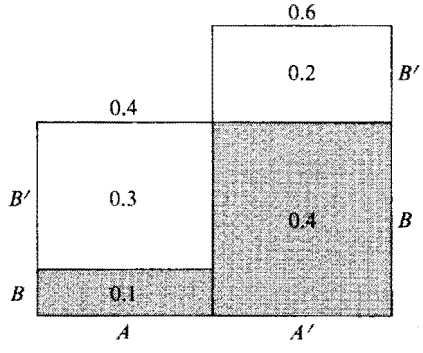


FIGURA 3.8

Supongamos ahora que deseamos calcular $P(B \mid A)$. Así sólo necesitamos considerar A; esto es, A' puede ignorarse en los cálculos. Notemos que la proporción de B en A es 1/4. (Esto lo podemos verificar también al aplicar la ecuación (3.1): $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A) =$

0.1/0.4 = 1/4.) Por lo tanto, $P(B' \mid A) = 3/4$; el diagrama que representa esta probabilidad condicional se ilustra en la figura 3.9.

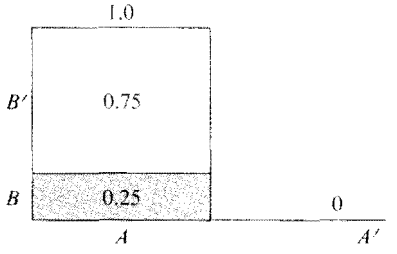


FIGURA 3.9

Nótese también que si A se da como ocurrido, todas las probabilidades (es decir, 1) se deben asociar con el evento A, mientras que ninguna de las probabilidades (es decir, 0) está asociada con A'. Aún más, nótese que en el rectángulo izquierdo, que representa A, sólo las colocaciones individuales han cambiado de la figura 3.8 a la figura 3.9 (sumando 1 en vez de 0.4). Sin embargo, las proporciones dentro del rectángulo permanecen iguales (es decir, 3:1).

Ilustremos la noción de independencia usando el procedimiento esquemático presentado anteriormente. Supóngase que los eventos A y B se dibujan en la figura 3.10. En ese caso, las proporciones en los dos rectángulos, que representan A y A', son las *mismas*: 3:1 en ambos casos. Así tenemos $P(B) = 0.1 + 0.15 = 0.25$, y $P(B \cap A) = 0.1/0.4 = 0.25$.

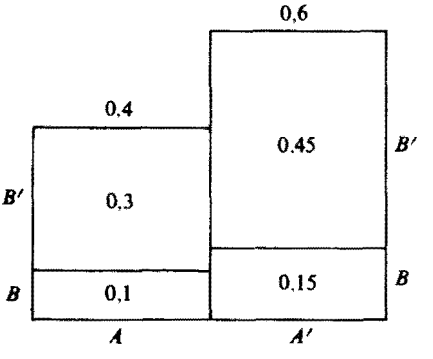


FIGURA 3.10

Finalmente, por simple inspección de la figura 3.8 podemos calcular las otras probabilidades condicionales:

$P(A \mid B) = 1/5$ (puesto que 1/5 del área total rectangular que representa B está ocupada por A),

$P(A' \mid B) = 4/5$.

PROBLEMAS

3.1. La urna 1 contiene x esferas blancas y y rojas. La urna 2 contiene z esferas blancas y v rojas. Se escoge una esfera al azar de la urna 1 y se pone en la urna 2. *Entonces* se escoge una esfera al azar de la urna 2. ¿Cuál es la probabilidad de que esta esfera sea blanca?

3.2. Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban, uno por uno, hasta encontrar los defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba?
b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la tercera prueba?
c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la cuarta prueba?
d) Sumar los números obtenidos en *a*), *b*) y *c*). ¿Es sorprendente el resultado?

3.3. Una caja contiene 4 tubos malos y 6 buenos. Se sacan dos a la vez. Se prueba uno de ellos y se encuentra que es bueno. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro también sea bueno?

3.4. En el problema anterior los tubos se verifican sacando uno al azar, se prueba y se repite el proceso hasta que se encuentran los cuatro tubos malos. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el cuarto tubo malo

a) en la quinta prueba?
b) en la décima prueba?

3.5. Supóngase que A y B son dos eventos independientes asociados con un experimento. Si la probabilidad de que A o B ocurra es igual a 0.6, mientras que la probabilidad de que A ocurra es igual a 0.4, determinar la probabilidad de que B ocurra.

3.6. Veinte artículos, 12 de los cuales son defectuosos y 8 no defectuosos, se inspeccionan uno después de otro. Si esos artículos se escogen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) los dos primeros artículos inspeccionados sean defectuosos?
b) los dos primeros artículos inspeccionados sean no defectuosos?
c) entre los dos primeros artículos inspeccionados haya uno defectuoso y uno no defectuoso?

3.7. Supóngase que tenemos 2 urnas, 1 y 2, cada una con dos cajones. La urna 1 tiene una moneda de oro en un cajón y una de plata en el otro, mientras que la urna 2 tiene una moneda de oro en cada uno de los cajones. Se escoge una urna al azar, y de ésta se escoge un cajón al azar. La moneda que se encontró

en este cajón es de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda provenga de la urna 2?

3.8. Un bolso contiene tres monedas, una de las cuales está acuñada con dos caras, mientras que las otras dos monedas son normales y no son irregulares. Se escoge una moneda al azar y se lanza cuatro veces en forma sucesiva. Si *cada* vez sale cara, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea la moneda con dos caras?

3.9. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40% de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2% respectivamente, son pernos defectuosos. Se escoge un perno al azar y resulta ser defectuoso. ¿cuáles son las probabilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, B o C?

3.10. Sean A y B dos eventos asociados con un experimento. Supóngase que $P(A) = 0.4$, mientras que $P(A \cup B) = 0.7$. Sea $P(B) = p$.

a) ¿Para qué elección de p son A y B mutuamente excluyentes?
b) ¿Para qué elección de p son A y B independientes?

3.11. Tres componentes de un mecanismo, digamos C_1, C_2 y C_3 están colocados en serie (en una línea recta). Supóngase que esos mecanismos están agrupados en orden aleatorio. Sea R el evento $\{C_2$ está a la derecha de $C_1\}$, y S el evento $\{C_3$ está a la derecha de $C_1\}$. ¿Los eventos R y S son independientes? ¿Por qué?

3.12. Se lanza un dado y de manera independiente se escoge al azar una carta de una baraja normal. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) el dado muestre un número par y la carta sea de un palo rojo?
b) el dado muestre un número par o la carta sea de un palo rojo?

3.13. Un número binario está compuesto sólo de los dígitos 0 y 1. (Por ejemplo, 1011, 1100, etc.) Esos números tienen un papel importante en el uso de los computadores electrónicos. Supóngase que un número binario está formado por n dígitos. Supóngase que la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es p y que los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de formar un *número* incorrecto?

3.14. Se lanza un dado n veces. ¿Cuál es la probabilidad de que "6" salga al menos una vez en los n lanzamientos?

3.15. Dos personas lanzan tres monedas regulares cada una. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?

3.16. Se lanzan dos dados y puesto que las caras muestran números diferentes, ¿cuál es la probabilidad de que una cara sea 4?

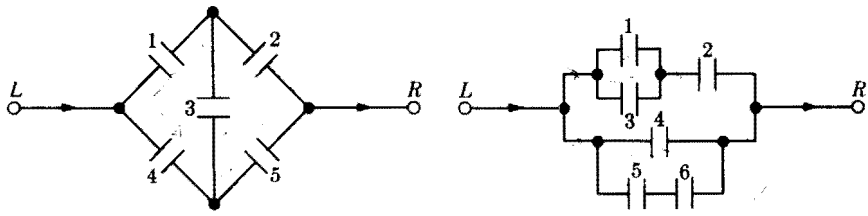
3.17. En la fabricación de cierto artículo se presenta un tipo de defectos con una probabilidad de 0.1 y defectos de un segundo tipo con probabilidad

de 0.05. (Se supone la independencia entre los tipos de defectos.) ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) un artículo no tenga ambas clases de defectos?
b) un artículo sea defectuoso?
c) suponiendo que un artículo sea defectuoso, tenga sólo un tipo de defecto?

3.18. Verificar que el número de condiciones indicadas en la ecuación (3.8) esté dado por $2^n - n - 1$.

3.19. Probar que si A y B son eventos independientes, también lo son A y B^c, A^c y B, A^c y B^c.



(a) FIGURA 3.11 (b)

3.20. En la figura 3.11 *a*) y *b*) se supone que la probabilidad de que cada relevador esté cerrado es p y que cada relevador se abre o se cierra independientemente de cualquier otro. Encontrar en cada caso la probabilidad de que la corriente pase de I a D.

TABLA 3.2

Número de fallas	0	1	2	3	4	5	6
A	0.1	0.2	0.3	0.2	0.09	0.07	0.04
B	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.15	0.15

3.21. Dos máquinas, A, B, que se accionan independientemente pueden tener cierto número de fallas cada día. La tabla 3.2 da la distribución de probabilidades de las fallas de cada una. Calcular las siguientes probabilidades:

a) A y B tienen el mismo número de fallas.
b) El número de fallas es menor que cuatro; menor que cinco.
c) A tiene más fallas que B.
d) B tiene el doble de fallas que A.
e) B tiene cuatro fallas, cuando se sabe que B tiene por lo menos dos fallas.

f) El número mínimo de fallas de las dos máquinas es tres; es menor que tres.

g) El número máximo de fallas de las máquinas es tres; es más que tres.

3.22. Usando la ecuación (3.2), demostrar que para A fijo, $P(B \mid A)$ satisface los diversos postulados de la probabilidad.

3.23. Si cada uno de los elementos de un determinante de segundo orden es cero o uno, ¿cuál es la probabilidad de que el valor del determinante sea positivo? (Supóngase que las colocaciones individuales del determinante se escogen independientemente, considerando que cada uno de los valores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$.)

3.24. Verificar que el teorema de la multiplicación $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$, establecido para dos eventos, se puede generalizar para tres eventos como sigue:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C)P(B \mid C)P(C).$$

3.25. Un conjunto electrónico consta de dos subsistemas, digamos A y B. A partir de una serie de pruebas previas, se presuponen las siguientes probabilidades:

$$P(A \text{ falle}) = 0.20,$$
$$P(B \textit{ sólo} \text{ falle}) = 0.15,$$
$$P(A \text{ y } B \text{ fallen}) = 0.15.$$

Calcular las probabilidades siguientes.

a) $P(A$ falle $\mid B$ haya fallado),
b) $P(A$ falle solamente).

3.26. Finalizar el análisis del ejemplo de la sección 3.2 decidiendo cuál de los tipos de cajas de caramelos, A o B, es el escogido con base en el conocimiento de dos caramelos que fueron muestreados.

3.27. Cada vez que se realiza un experimento, la ocurrencia de un evento particular A es igual a 0.2. El experimento se repite, independientemente, hasta que A ocurre. Calcular la probabilidad de que sea necesario ejecutar un cuarto experimento.

3.28. Supóngase que un mecanismo tiene N tubos y que todos son necesarios para su funcionamiento. Para localizar el tubo que funciona mal, se reemplaza sucesivamente cada uno de ellos por uno nuevo. Calcular la probabilidad de que sea necesario verificar N tubos si la probabilidad (constante) de que un tubo esté dañado es p.

3.29. Probar: Si $P(A \mid B) > P(A)$, entonces $P(B \mid A) > P(B)$.

3.30. Un tubo al vacío puede provenir de cualquiera de tres fabricantes con probabilidades $p_1 = 0.25$, $p_2 = 0.50$ y $p_3 = 0.25$. Las probabilidades de que el tubo funcione correctamente durante un periodo de tiempo especificado son iguales a 0.1, 0.2 y 0.4, respectivamente, para los tres fabricantes. Calcular la probabilidad de que un tubo elegido al azar funcione durante el periodo de tiempo especificado.

3.31. Un sistema eléctrico consta de dos interruptores del tipo A, uno del tipo B y cuatro del tipo C conectados como aparece en la figura 3.12. Calcular la probabilidad de que no se pueda eliminar una falla en el circuito con la llave K, si los interruptores A, B y C están abiertos (es decir, fuera de servicio) con probabilidades 0.3, 0.4, 0.2, respectivamente, y si ellos funcionan de manera independiente.

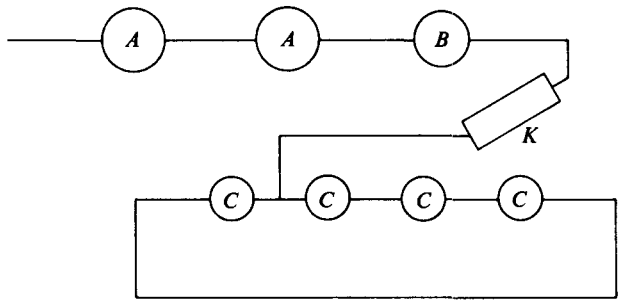


FIGURA 3.12

3.32. La probabilidad de que un sistema se sobrecargue es 0.4 durante cada conjunto de ensayos de un experimento. Calcular la probabilidad de que el sistema deje de funcionar en tres ensayos independientes del experimento, si las probabilidades de fallar en 1, 2 o 3 ensayos son iguales a 0.2, 0.5 y 0.8, respectivamente.

3.33. Se emiten sucesivamente cuatro señales de radio. Si la recepción de cualquier señal es independiente de la recepción de otra y estas probabilidades son 0.1, 0.2, 0.3, y 0.4, respectivamente, calcular la probabilidad de que la señal k se reciba por $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3.34. Un aficionado usa el siguiente sistema bastante simple para pronosticar el tiempo atmosférico. Clasifica cada día como "seco" o "mojado" y supone que la probabilidad de que cualquier día dado sea igual al precedente está dada por una constante $p(0 < p < 1)$. Con base en anotaciones anteriores, se supone que el 1o. de enero tiene una probabilidad β de ser "seco". Suponiendo que $\beta_n =$

probabilidad (el n-ésimo día del año es "seco"), obtener una expresión para β_n en función de β y p. Evaluar también $\lim_{n\to\infty}\beta_n$ e interpretar su resultado. (*Sugerencia*: Expresar β_n en función de β_{n-1}).

3.35. En una ciudad se publican los periódicos A, B y C. Una encuesta reciente de lectores indica lo siguiente: 20% lee A, 16% lee B, 14% lee C, 8% lee A y B, 5% lee A y C, 2% lee A, B y C, y 4% lee B y C. Para un adulto escogido al azar, calcular la probabilidad de que *a*) no lea ninguno de los periódicos, *b*) lea exactamente uno de los periódicos, *c*) lea al menos A y B si se sabe que lee al menos uno de los periódicos.

3.36. Una moneda normal se lanza $2n$ veces.

a) Obtener la probabilidad de que haya un número igual de caras y sellos.

b) Mostrar que la probabilidad calculada en *a*) es una función decreciente de n.

3.37. Cada una de las urna 1, urna 2,..., urna n contiene α esferas blancas y β esferas negras. Se pasa una esfera de la urna 1 a la urna 2 y *luego* se pasa una de la urna 2 a la urna 3, etc. Finalmente, se escoge una esfera de la urna n. Si la primera esfera que se pasó era blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la última esfera elegida sea blanca? ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$? [*Sugerencia:* Sea p_n = Prob (n-ésima esfera pasada sea blanca) y expresar p_n en términos de p_{n-1}.]

3.38. La urna 1 contiene α esferas blancas y β esferas negras, mientras que la urna 2 contiene β esferas blancas y α esferas negras. Se escoge una esfera (de una de las urnas) y luego se devuelve a esa urna. Si la esfera elegida es blanca, la siguiente se escoge de la urna 1; si la esfera elegida es negra, la siguiente se escoge de la urna 2. Continuar de esta manera. Dado que la primera esfera escogida proviene de la urna 1, obtener Prob (n-ésima esfera escogida sea blanca) y también el límite de esta probabilidad cuando $n \to \infty$.

3.39. Una máquina puede imprimir n "letras", digamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Esta máquina opera por impulsos eléctricos y cada letra se produce por un impulso *diferente*. Supóngase que exista una probabilidad constante p de imprimir la letra correcta y también supóngase independencia. Uno de los n impulsos, elegido al azar, alimentó la máquina dos veces y las dos veces se imprimió la letra α_1. Calcular la probabilidad de que el impulso escogido estuviese proyectado para imprimir α_1.

4

Variables aleatorias unidimensionales

4.1 Noción general de una variable aleatoria

Al describir el espacio muestral de un experimento no especificamos que un resultado individual necesariamente tiene que ser un número. De hecho, hemos citado varios ejemplos en los cuales el resultado del experimento no fue una cantidad numérica. Por ejemplo, al clasificar un artículo manufacturado simplemente podíamos usar las categorías "defectuoso" y "no defectuoso". En otro caso, para observar la temperatura durante un periodo de 24 horas sólo podíamos mantener un registro de la curva trazada por el termógrafo. Sin embargo, en muchas situaciones experimentales vamos a interesarnos en medir algo y anotarlo como un *número*. Aún en los casos antes citados, podremos asignar un número a cada uno de los resultados (no numéricos) del experimento. Por ejemplo, pudimos asignar el valor 1 a artículos no defectuosos y el valor 0 a los defectuosos, así como anotar la temperatura máxima o mínima del día, o el promedio de las temperaturas máxima y mínima.

Los ejemplos anteriores son características de una clase muy general de problemas. En muchas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S.

Esto es, $x = X(s)$ es el valor de una función X del espacio muestral a los números reales. Teniendo esto presente, hagamos la siguiente definición formal.

Definición. Sea ε un experimento y S el espacio muestral asociado con él. Una *función* X que asigna a cada uno de los elementos $s \in S$, un número real $X(s)$, se llama *variable aleatoria*.

Observaciones: a) La terminología anterior es algo desafortunada, pero es tan universalmente aceptada que nosotros no nos apartaremos de ella. Hemos hecho lo más claro posible que X es una *función*, ¡y todavía la llamamos variable (aleatoria)!

b) Resulta que *no toda* función que se conciba puede considerarse como una variable aleatoria. Una exigencia (aunque no la más general) es que para todo número real x el evento $\{X(s) = x\}$ y para todo intervalo I, el evento $\{X(s) \in I\}$ tiene probabilidades bien definidas y consecuentes con los axiomas básicos. En la mayoría de las aplicaciones no aparece esta dificultad y no haremos referencia posterior.

c) En algunos casos, el resultado s del espacio muestral es ya la característica numérica que queremos anotar. Simplemente tomamos $X(s) = s$, la función identidad.

d) En la mayoría de los análisis de variables aleatorias que siguen no necesitamos indicar la naturaleza funcional de X. En general, nos interesamos en los valores *posibles* de X, en vez de indagar de dónde provienen esos valores. Por ejemplo, supongamos que lanzamos dos monedas y consideramos el espacio muestral asociado con este experimento. Esto es,

$$S = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

Definamos la variable aleatoria X como sigue: X es el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos. Por lo tanto, $X(CC) = 2, X(CS) = X(SC) = 1$ y $X(SS) = 0$.

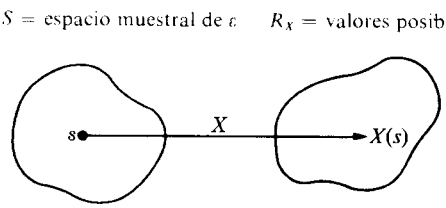


FIGURA 4.1

e) Es muy importante comprender una exigencia básica de una función para un sólo valor: a *cada* $s \in S$ le corresponde *exactamente un* valor $X(s)$. Esto se demuestra esquemáticamente en la figura 4.1. Valores diferentes de s *pueden* dar el mismo valor de X. Por ejemplo, en la ilustración anterior encontramos que $X(CS) = X(SC) = 1$.

El espacio R_x, es decir, el conjunto de todos los valores posibles de X, algunas veces se llama el recorrido. En cierto sentido podemos considerar a R_x como otro espacio muestral. El espacio muestral (original) S corresponde a los resultados no numéricos (posiblemente) del experimento, mientras que R_x es el espacio muestral asociado con la variable aleatoria X, que representa la característica numérica que puede ser de interés. Si $X(s) = s$, tenemos $S = R_x$.

Aunque estamos conscientes del peligro pedagógico que existe al dar muchas explicaciones de lo mismo, señalamos sin embargo que podemos concebir una variable aleatoria X de dos maneras:

a) Realizamos el experimento ε que tiene como resultado $s \in S$. *Luego* evaluamos el número $X(s)$.

b) Efectuamos ε, obteniendo el resultado s, e (inmediatamente) calculamos $X(s)$. El número $X(s)$ se considera entonces como el resultado obtenido en el experimento y R_x se convierte en el espacio muestral del experimento.

No es fácil establecer la diferencia entre las interpretaciones *a*) y *b*). Relativamente es muy pequeña, pero digna de atención. En *a*) el experimento termina, de hecho, con la observación de s. La evaluación de $X(s)$ se estima como algo que se hace posteriormente y que no se afecta por la aleatoriedad de ε. En *b*) se considera que el experimento no está terminado hasta que el número $X(s)$ se ha calculado y se tiene así el espacio muestral R_x como resultado. Aunque la primera interpretación, *a*) es la que usualmente se pretende, el segundo punto de vista, *b*) puede ser muy útil y el lector deberá recordarlo. Lo que queremos decir, y esto será más evidente en las últimas secciones, es que al estudiar variables aleatorias estamos más interesados respecto a los valores que toma X que de su forma funcional. Por lo tanto, en muchos casos ignoraremos por completo el espacio muestral sobre el cual se puede definir X.

EJEMPLO 4.1. Supongamos que se pone una bombilla en un portalámparas. Se considera que el experimento termina cuando la bombilla se apaga. ¿Cuál es un resultado posible, digamos s? Una manera de describir s sería anotando simplemente la fecha y la hora del día en la cual

la bombilla se quema, por ejemplo 19 de mayo, 4:32 PM. Por lo tanto, el espacio muestral se puede representar como $S = \{(d,t) \mid d = \text{fecha}, t = \text{hora del día}\}$. Posiblemente la variable aleatoria de interés es X, el tiempo que permanece encendida. Nótese que una vez que se ha observado $s = (d,t)$, la *evaluación* de $X(s)$ no indica ninguna aleatoriedad. Cuando s está especificada, $X(s)$ está determinado por completo.

Los dos puntos de vista antes expresados pueden aplicarse a este ejemplo como sigue. En *a*) consideramos que el experimento termina con la observación $s = (d,t)$, la fecha y la hora del día. El cálculo de $X(s)$ se efectúa, entonces, haciendo una sencilla operación aritmética. En *b*) sólo damos por terminado el experimento hasta *después* de haber evaluado $X(s)$, y entonces el número $X(s) = 107$ horas, por ejemplo, se considera como su resultado.

Es posible señalar que un análisis similar se podría aplicar a otra variable aleatoria de interés, por ejemplo, $Y(s)$ es la temperatura en la habitación en el instante en que la bombilla se quema.

EJEMPLO 4.2. En una mesa se lanzan tres monedas. Tan pronto como las monedas caen en la mesa, concluye la fase "aleatoria" del experimento. Un sólo resultado s podría consistir en una descripción detallada de cómo y dónde cayeron las monedas. Posiblemente estamos interesados sólo en ciertas características numéricas asociadas con este experimento. Por ejemplo, podríamos calcular

$X(s) =$ número de caras que aparecen,
$Y(s) =$ distancia máxima entre dos monedas cualesquiera,
$Z(s) =$ distancia mínima de las monedas desde cualquier arista de la mesa.

Si la variable aleatoria X es de interés, como indicamos en el ejemplo anterior, podríamos incluir la evaluación de $X(s)$ en la descripción del experimento y, por lo tanto, sólo indicar que el espacio muestral asociado con el experimento es $\{0,1,2,3\}$, que corresponden a los valores de X. Aunque a menudo adoptaremos precisamente este punto de vista, es importante establecer que la cuenta del número de caras se hace *después* de que ha terminado la parte aleatoria del experimento.

Observación: Al referirnos a variables aleatorias usaremos, casi sin excepción, letras mayúsculas como X, Y, Z, etc. Sin embargo, cuando hablemos del *valor* de

esas variables aleatorias en general emplearemos letras minúsculas como x, y, z, etc. Ésta es una *distinción muy importante* que debemos hacer y el estudiante contemplar con detenimiento. Por ejemplo, cuando hablamos de escoger al azar una persona de alguna población señalada y medir su estatura (en pulgadas, por ejemplo), podríamos referirnos a los resultados *posibles* como una variable aleatoria X. También es posible hacer varias preguntas acerca de X, tales como $P(X \geq 60)$. Sin embargo, una vez que elegimos una persona y medimos su estatura, obtenemos un valor específico de X, por ejemplo, x. Así no sería relevante preguntar por $P(x \geq 60)$, puesto que x es o no ≥ 60. Esta distinción entre una variable aleatoria y su valor es importante, y más adelante nos referiremos a ella.

Así como nos interesamos por los eventos asociados con el espacio muestral S, también será necesario tratar eventos respecto a la variable aleatoria X, esto es, subconjunto del recorrido R_x. Muy a menudo ciertos eventos asociados con S están "relacionados" (en un sentido que luego describiremos) con eventos asociados con R_x de la manera siguiente.

Definición. Sea ε un experimento y S su espacio muestral. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_x su recorrido. Sea B un evento respecto a R_x; esto es, $B \subset R_x$. Supongamos que A se define como

$$A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}. \tag{4.1}$$

En palabras, A consta de todos los resultados en S para los cuales $X(s) \in B$ (Fig. 4.2). En este caso decimos que A y B son eventos *equivalentes*.

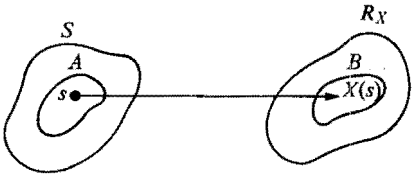


FIGURA 4.2

Observaciones: a) Expresando lo anterior de manera más informal, A y B son eventos equivalentes siempre que ocurran juntos. Esto es, siempre que A

ocurre, B ocurre y viceversa. Si ocurrió A, entonces se obtuvo un resultado s para el cual $X(s) \in B$ y, por lo tanto, ocurrió B. Recíprocamente, si B ocurrió, se observó un valor $X(s)$ para el cual $s \in A$ y, por lo tanto, ocurrió A.

b) Es importante destacar que en nuestra definición de eventos equivalentes, A y B están asociados con espacios muestrales *diferentes*.

EJEMPLO 4.3. Consideremos el lanzamiento de dos monedas. En este caso, $S = \{CC, CS, SC, SS\}$. Sea X el número de caras obtenidas. Por lo tanto, $R_x = \{0, 1, 2\}$. Sea $B = \{1\}$. Puesto que $X(CS) = X(SC) = 1$ si y sólo si $X(s) = 1$, tenemos que $A = \{CS, SC\}$ es equivalente a B.

Ahora damos la siguiente definición importante.

Definición. Sea B un evento en el recorrido R_x, entonces *definimos* $P(B)$ como sigue:

$$P(B) = P(A), \quad \text{donde} \quad A = \{s \in S \mid X(s) \in B\}. \tag{4.2}$$

En palabras, definimos $P(B)$ igual a la probabilidad del evento $A \subset S$, que es equivalente a B, en el sentido de la ecuación (4.1).

Observaciones: a) Suponemos que las probabilidades se pueden asociar con eventos en S. Por tanto, la definición anterior hace posible asignar probabilidades a eventos asociados con R_x en términos de las probabilidades definidas en S.

b) Realmente es posible *probar* que $P(B)$ debe ser como se definió. Sin embargo, esto implicaría alguna dificultad teórica que queremos evitar y, por tanto, proseguiremos como antes.

c) Puesto que en la formulación de la ecuación (4.2) los eventos A y B se refieren a espacios muestrales diferentes, en realidad deberíamos usar una notación diferente cuando nos referimos a las probabilidades definidas en S y para las definidas en R_x, por ejemplo, algo como $P(A)$ y $P_x(B)$. Sin embargo, no haremos esto sino que continuaremos escribiendo simplemente $P(A)$ y $P(B)$. El contexto dentro del cual aparezcan estas expresiones hará evidente la interpretación.

d) Las probabilidades asociadas con eventos en el espacio muestral S (original) están en un sentido, determinadas por "fuerzas que escapan a nuestro control" o, como se dice algunas veces "por naturaleza". La constitución de una fuente radioactiva que emite partículas, la distribución de un gran número de personas que podría hacer una llamada telefónica durante determinada hora y la agitación térmica que resulta de una corriente o las condiciones atmosféricas

que dan origen a una fuente de tormenta, ilustran este punto. Cuando introducimos una variable aleatoria X y su recorrido asociado R_x, *inducimos* probabilidades sobre los eventos asociados con R_x que se determinan estrictamente si las posibilidades asociadas con los eventos en S están especificadas.

EJEMPLO 4.4. Si las monedas consideradas en el ejemplo 4.3 son "normales", tenemos $P(CS) = P(SC) = \frac{1}{4}$. Por tanto, $P(CS, SC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. (Los cálculos anteriores son una consecuencia directa de nuestra suposición básica acerca de la regularidad de las monedas.) Puesto que el evento $\{X = 1\}$ es equivalente al evento $\{CS, SC\}$, usando la ecuación (4.1) tenemos que $P(X = 1) = P(CS, SC) = \frac{1}{2}$. [Realmente no había elección acerca del valor de $P(X = 1)$ consistente con la ecuación (4.2), una vez que se determinó $P(CS, SC)$. En este sentido, se *inducen* las probabilidades asociadas con eventos R_x.]

Observación: Ahora que hemos establecido la existencia de una función de probabilidades inducidas sobre el recorrido de X (ecuaciones 4.1 y 4.2) encontraremos conveniente *suprimir* la naturaleza funcional de X. Por lo tanto, escribiremos (como lo hicimos en el ejemplo anterior) $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Lo que se quiere decir es que un evento en el espacio muestral S, llamado $\{CS, SC\} = \{s \mid X(s) = 1\}$ ocurre con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, asignamos esa misma probabilidad al evento $\{X = 1\}$ en el recorrido. Continuaremos escribiendo expresiones como $P(X = 1), P(X \leq 5)$, etc. Es *muy importante* que el lector se dé cuenta de lo que esas expresiones representan realmente.

Una vez que se han determinado (o más exactamente, inducido) las probabilidades asociadas con varios resultados (o eventos) en el recorrido R_x ignoraremos a menudo el espacio muestral original S que dio lugar a esas probabilidades. Así, en el ejemplo anterior, sólo estamos interesados en $R_x = \{0, 1, 2\}$ y las probabilidades asociadas $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. El hecho de que estas probabilidades estén *determinadas* por una función de probabilidad definida en el espacio muestral original S no nos preocupa si estamos interesados sólo en estudiar los valores de la variable aleatoria X.

Al analizar en detalle muchos de los conceptos importantes asociados con variables aleatorias encontraremos conveniente distinguir dos casos importantes: las variables aleatorias discretas y las continuas.

4.2 Variables aleatorias discretas

Definición. Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (esto es, R_x, el recorrido) es finito o infinito numerable, llamamos a X una *variable aleatoria discreta*. Esto es, se pueden anotar los *valores* posibles de X como $x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$ En el caso finito, la lista termina y en el caso infinito numerable, la lista continúa indefinidamente.

EJEMPLO 4.5. Una fuente radioactiva emite partículas α. Un contador observa la emisión de esas partículas durante un periodo de tiempo determinado. La siguiente variable aleatoria es de interés:

$$X = \text{número de partículas observadas.}$$

¿Cuáles son los valores posibles de X? Supondremos que estos valores constan de todos los enteros no negativos. Esto es, $R_x = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Una objeción que vimos anteriormente puede aparecer de nuevo en este punto. Podría argüirse que durante un intervalo de tiempo especificado (finito) es imposible observar más de, por ejemplo, N partículas donde N puede ser un entero positivo muy grande. Por tanto, los valores posibles de X realmente serían: $0, 1, 2, \ldots, N$. No obstante, resulta que matemáticamente es más sencillo considerar la descripción idealizada antes dada. De hecho, cada vez que suponemos que los valores posibles de una variable aleatoria X son infinitos numerables estamos considerando una representación idealizada de X.

En vista de nuestros comentarios previos sobre la descripción probabilística de eventos con número finito de elementos o infinitos numerables, la descripción probabilística de una variable aleatoria discreta no nos causará ninguna dificultad. Procederemos como se indica a continuación.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta. Por tanto, R_x, el recorrido de X, consta, a lo más, de un número de valores, $x_1, x_2, \ldots$ infinito numerable. Con cada resultado posible x_i asociamos un número $p(x_i) = P(X = x_i)$, llamado probabilidad de x_i. Los números $p(x_i), i = 1, 2, \ldots$ deben satisfacer las condiciones siguientes:

$$a)\ p(x_i) \geq 0 \quad \text{para toda } i,$$

$$b)\ \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1. \tag{4.3}$$

La función p que antes se definió, se llama *función de probabilidad* (o función de probabilidad puntual) de la variable aleatoria X. La colección de pares $(x_i p(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, algunas veces se llama *distribución de probabilidad de* X.

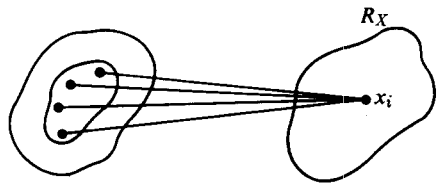


FIGURA 4.3

Observaciones: a) La elección particular de los números $p(x_i)$ posiblemente está determinada por la función de probabilidad asociada con eventos en el espacio muestral S sobre el cual se define X. Esto es, $p(x_i) = P[s \mid X(s) = x_i]$. (Véanse las ecuaciones 4.1 y 4.2.). Sin embargo, ya que sólo estamos interesados en los valores de X, esto es R_x, y en las probabilidades asociadas con esos valores, omitimos otra vez la naturaleza funcional de X (véase la Fig. 4.3). Aunque en la mayoría de los casos los números de hecho se determinarán de la distribución de probabilidades en algún espacio muestral fundamental S, *cualquier* conjunto de números $p(x_i)$ que satisfaga la ecuación (4.3) puede servir como una descripción probabilística propia de una variable aleatoria discreta.

b) Si X toma sólo un número finito de valores, por ejemplo $x_1, \ldots, x_n$, entonces $p(x_i) = 0$ para $i < N$ y, por lo tanto, la serie infinita en la ecuación (4.3) llega a ser una suma finita.

c) Nuevamente podemos observar una analogía con la mecánica, al considerar una masa total unitaria distribuida sobre la recta real con la masa completa ubicada en los puntos $x_1, x_2, \ldots$ Los números $p(x_i)$ representan la cantidad de masa localizada en x_i.

d) La interpretación geométrica (figura 4.4) de una distribución de probabilidades es siempre útil.

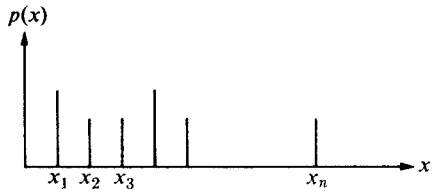


FIGURA 4.4

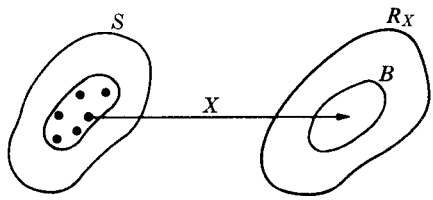


FIGURA 4.5

Sea B un evento asociado con la variable aleatoria X. Esto es, $B \subset R_x$ (Fig. 4.5). Específicamente, supongamos que $B = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$. Por tanto,

$$P(B) = P[s \mid X(s) \in B] \qquad \text{(puesto que estos eventos son equivalentes)}$$

$$= P[s \mid X(s) = x_{i_j}, j = 1, 2, \ldots] = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{i_j}). \tag{4.4}$$

En palabras, la probabilidad de un evento B es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales asociados con B.

Observaciones: a) Supóngase que la variable aleatoria discreta X puede tomar sólo un número finito de valores, por ejemplo $x_1, \ldots, x_n$. Si cada resultado es igualmente probable, resulta obvio que tenemos $p(x_1) = \ldots = p(x_N) = 1/N$.

b) Si X toma un número infinito numerable de valores, entonces es *imposible* tener todos los resultados igualmente probables, porque quizá no podamos satisfacer la condición si hemos de tener $p(x_i) = c$ para toda i.

c) En cada intervalo finito habrá cuando mucho un número finito de valores posibles de X. Si uno de esos intervalos no contiene ninguno de los valores posibles, le asignamos probabilidad cero. Esto es, si $R_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y si ningún $x_i \in [a, b]$, entonces $P[a \leq X \leq b] = 0$.

EJEMPLO 4.6. Supóngase que se pone un tubo de radio en un soporte y se prueba. Considérese que la probabilidad de que el control sea positivo es igual a $\frac{3}{4}$; por tanto, la probabilidad de que el control sea negativo es $\frac{1}{4}$. Supóngase, además, que probamos una gran cantidad de esos tubos. La prueba continúa hasta que aparece el primer tubo positivo. Defínase la variable aleatoria X como sigue: X es el número

de pruebas necesarias para finalizar el experimento. El espacio muestral asociado con este experimento es

$$S = \{+, -+, --+, ---+, \cdots\}.$$

Para determinar la distribución de probabilidades de X razonamos de la siguiente manera. Los valores posibles de X son $1, 2, \ldots, n, \ldots$ (obviamente estamos considerando el espacio muestral idealizado). Y $X = n$ si y sólo si los primeros $(n-1)$ tubos son negativos y el n-ésimo tubo es positivo. Si suponemos que la condición de un tubo no afecta la condición de otro, podemos escribir

$$p(n) = P(X = n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\tfrac{3}{4}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Para verificar que estos valores de $p(n)$ satisfagan la ecuación (4.3), observemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \frac{3}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots) \\ &= \frac{3}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1\end{aligned}$$

Observaciones: Aquí empleamos el resultado de que la *serie geométrica* $1 + r + r^2 + \cdots$ converge a $1/(1-r)$ siempre que $|r| < 1$. A este resultado nos referiremos varias veces. Supóngase que queremos calcular $P(A)$, donde A se define como {El experimento termina después de un número par de repeticiones}. Usando la ecuación (4.4), tenemos

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(2n) = \frac{3}{16} + \frac{3}{256} + \cdots \\ &= \frac{3}{16}(1 + \tfrac{1}{16} + \cdots) \\ &= \frac{3}{16}\frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

4.3 La distribución binomial

En los capítulos finales consideraremos en forma detallada diversas variables aleatorias discretas importantes. Por el momento, sólo estudiaremos una de ellas y luego la usaremos para ilustrar varios conceptos relevantes.

EJEMPLO 4.7. Supóngase que los artículos que salen de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) o no defectuosos (N) y que se eligen al azar tres artículos de la producción de un día, los cuales se clasifican de acuerdo con este esquema. El espacio muestral para este experimento, digamos S, puede describirse así:

$$S = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}.$$

(Otra manera de describir S es como $S = S_1 \times S_2 \times S_3$, el producto cartesiano de S_1, S_2, y S_3, donde cada $S_i = \{D, N\}$.)

Supongamos que con probabilidad 0.2 un artículo es defectuoso y, por lo tanto, con probabilidad 0.8 un artículo es no defectuoso. Supongamos que esas probabilidades son *iguales* para cada artículo, al menos durante nuestro estudio. Finalmente, supongamos que la clasificación de cualquier artículo particular es independiente de la clasificación de cualquier otro artículo. Usando estas suposiciones, se deduce que las probabilidades asociadas con los diversos resultados del espacio muestral S, como antes se describió, son

$$(0.2)^3, (0.8)(0.2)^2, (0.8)(0.2)^2, (0.8)(0.2)^2, (0.2)(0.8)^2, (0.2)(0.8)^2, (0.8)^3.$$

Usualmente nuestro interés no se enfoca hacia los resultados individuales de S, sino que sólo deseamos saber *cuántos* artículos defectuosos se encuentran (sin tomar en cuenta el orden en que ocurrieron). Es decir, deseamos considerar la variable aleatoria X que asigna a cada uno de los resultados $s \in S$ el número de artículos defectuosos encontrados en s. Por tanto, el conjunto de valores posibles de X es $\{0, 1, 2, 3\}$.

Podemos obtener la distribución de probabilidades para X, $p(x_i) = P(X = x_i)$ como sigue:

$X = 0$ si y sólo si ocurre NNN;

$X = 1$ si y sólo si ocurre DNN, NDN o NND;

$X = 2$ si y sólo si ocurre DDN, DND o NDD;

$X = 3$ si y sólo si ocurre DDD.

(Nótese que $\{NNN\}$ equivale a $\{X = 0\}$, etc.) Por lo tanto,

$$p(0) = P(X = 0) = (0.8)^3, \quad p(1) = P(X = 1) = 3(0.2)(0.8)^2,$$

$$p(2) = P(X = 2) = 3(0.2)^2(0.8), p(3) = P(X = 3) = (0.2)^3.$$

Nótese que la suma de estas probabilidades es igual a 1, porque la suma se puede escribir $(0.8 + 0.2)^3$.

Observación: La exposición anterior ilustra cómo las probabilidades en el recorrido R_x (en este caso, $\{0, 1, 2, 3\}$) son *inducidas* por las probabilidades definidas en el espacio muestral S, porque la suposición de que los ocho resultados de

$$S = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}$$

tienen las probabilidades dadas en el ejemplo 4.7, *determina* el valor de $p(x)$ para toda $x \in R_x$.

Generalicemos ahora las nociones presentadas en el ejemplo anterior.

Definición. Consideremos un experimento ε y sea A un evento asociado con ε. Supongamos que $P(A) = p$ y, por lo tanto, $P(A^c) = 1 - p$. Consideremos n repeticiones independientes de ε. Por lo tanto, el espacio muestral consiste en todas las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde cada a_i es A o A^c, según A o A^c ocurra en la i-ésima repetición de ε. (Hay 2^n de tales sucesiones). Aún más, supongamos que $P(A) = p$ es el mismo para todas las repeticiones. Definamos la variable aleatoria X como sigue: X = número de veces que ocurrió el evento A. Llamamos a X una variable aleatoria *binomial* con los parámetros n y p. Sus valores posibles obviamente son $0, 1, 2, \ldots, n$. (Decimos en forma equivalente que X tiene una *distribución binomial*.) Las repeticiones individuales de ε se llamarán *ensayos de Bernoulli*.

Teorema 4.1. Sea X una variable binomial con base en n repeticiones. Entonces

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{4.5}$$

Demostración: Consideremos un elemento particular del espacio muestral ε que satisfaga la condición de que $X = k$. Tal resultado aparecería, por ejemplo, si las primeras k repeticiones de ε resultasen en la ocurrencia de A, mientras que las últimas $n - k$ repeticiones resultasen en A^c, es decir:

$$\underbrace{AAA\cdots A}_{k}\ \underbrace{A^cA^cA^c\cdots A^c}_{n-k}.$$

Puesto que todas las repeticiones son independientes, la probabilidad de esta sucesión particular sería $pk(1-p)^{n-k}$. Pero exactamente la misma probabilidad estaría asociada con cualquier otro resultado para el cual $X = k$. El número total de tales resultados es igual a $\binom{n}{k}$, por lo que debemos elegir con exactitud k posiciones (entre n) para las A. Pero esto produce el resultado anterior, ya que esos $\binom{n}{k}$ resultados son mutuamente excluyentes.

Observaciones: a) Para verificar nuestros cálculos, observemos que, usando el teorema del binomio, tenemos $\Sigma_{k=0}^{n} P(X = k) = \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1$, como debería ser. Puesto que las probabilidades $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ se obtienen al desarrollar la expresión binomial $[p+(1-p)]^n$, a ésta la llamamos distribución binomial.

b) Cada vez que realizamos repeticiones independientes de un experimento y nos interesamos sólo en una dicotomía –defectuosos *o* no defectuosos, dureza sobre *o* bajo un cierto valor estándar, nivel de ruido en un sistema de comunicaciones superior *o* inferior a un margen preasignado– consideramos potencialmente un espacio muestral en el cual podemos definir una variable aleatoria binomial. Si las condiciones del experimento permanecen suficientemente uniformes de modo que la probabilidad de algún atributo, por ejemplo A, permanezca constante, podemos usar el modelo anterior.

c) Si n es pequeña, los términos individuales de la distribución binomial son relativamente sencillos de calcular. Sin embargo, si n es razonablemente grande, estos cálculos llegan a ser un poco complicados. Por fortuna, las probabilidades binomiales han sido calculadas. Existen muchas de esas tabulaciones (véase Apéndice).

EJEMPLO 4.8. Supongamos que un tubo de radio puesto en cierto tipo de equipo tiene una probabilidad de 0.2 de funcionar más de 500 horas. Si probamos 20 tubos, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente k de ellos funcionen más de 500 horas, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$?

Si X es el número de tubos que funcionan más de 500 horas, supondremos que X tiene una distribución binomial. Así, $P(X = k) = \binom{20}{k}(0.2)^k(0.8)^{20-k}$. Los siguientes valores pueden leerse en la tabla 4.1.

TABLA 4.1

$P(X = 0) = 0.012$	$P(X = 4) = 0.218$	$P(X = 8) = 0.022$
$P(X = 1) = 0.058$	$P(X = 5) = 0.175$	$P(X = 9) = 0.007$
$P(X = 2) = 0.137$	$P(X = 6) = 0.109$	$P(X = 10) = 0.002$
$P(X = 3) = 0.205$	$P(X = 7) = 0.055$	$P(X = k) = 0^+$ para $k \geq 11$

(Las probabilidades restantes son menores que 0.001.)

Si dibujamos esta distribución de probabilidades obtenemos la gráfica que se muestra en la figuras 4.6. El modelo que observamos aquí es muy general: las probabilidades binomiales aumentan monótonamente hasta que alcanzan un valor máximo y luego disminuyen de la misma manera. (Véase el Prob. 4.8.)

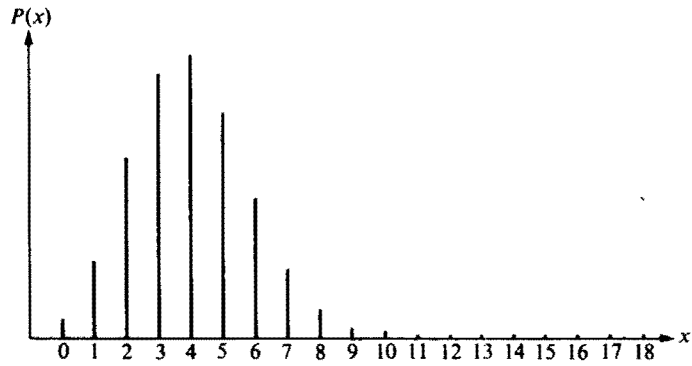


FIGURA 4.6

EJEMPLO 4.9. Al poner en funcionamiento una máquina, existe cierta probabilidad de que el operario cometa un error. De manera realista puede suponerse que éste aprende en cuanto sabe que la probabilidad de cometer errores disminuye cuando use la máquina en repetidas ocasiones. Supongamos que el operario hace n intentos y que los n ensayos son estadísticamente independientes. Supongamos de manera específica que P(un error cometido en la i-ésima repetición) =

$1/(i+1), i = 1, 2, \ldots, n$. Supongamos que se consideran 4 intentos (esto es, $n = 4$) y que se define la variable aleatoria X como el número de operaciones hechas sin error en la máquina. Observemos que X no está distribuida binomialmente porque la probabilidad de "éxito" no es constante.

Para calcular la probabilidad de $X = 3$, por ejemplo, procedemos como sigue: $X = 3$ si y sólo si hay exactamente un intento no exitoso. Esto puede suceder en el primero, segundo, tercero o cuarto ensayo. Por lo tanto,

$$P(X = 3) = \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}\tfrac{3}{4}\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{3}\tfrac{3}{4}\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{4}\tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{5} = \tfrac{5}{12}.$$

EJEMPLO 4.10. Consideremos una situación semejante a la descrita en el ejemplo 4.9. Esta vez supondremos que hay una probabilidad constante p_1 de no cometer error en la máquina durante cada uno de los primeros n_1 intentos y una probabilidad constante $p_2 \leq p_1$ de no cometer error en cada una de las siguientes n_2 repeticiones. Sea X el número de operaciones exitosas de la máquina durante los $n = n_1 + n_2$ intentos independientes. Encontramos una expresión general para $P(X = k)$. Por la misma razón dada en el ejemplo precedente, X no está distribuida binomialmente. Para obtener $P(X = k)$ procedemos como sigue.

Sea Y_1 el número de operaciones correctas durante los primeros n_1 intentos y sea Y_2 el número de operaciones correctas durante los segundos n_2 intentos.

Por lo tanto, Y_1 y Y_2 son variables aleatorias independientes y $X = Y_1 + Y_2$. Así, $X = k$ si y sólo si $Y_1 = r$ y $Y_2 = k - r$, para cualquier entero r que satisfaga $0 \leq r \leq n_1$ y $0 \leq k - r \leq n_2$.

Las restricciones anteriores sobre r son equivalentes a $0 \leq r \leq n_1$ y $k - n_2 \leq r \leq k$. Combinándolas podemos escribir

$$\text{máx } (0, k - n_2) \leq r \leq \text{ mín } (k, n_1).$$

Por tanto, tenemos

$$P(X = k) = \sum_{r=\text{máx }(0,k-n_2)}^{\text{mín}(k,n_1)} \binom{n_1}{r} p_1^r (1-p_1)^{n_1-r} \binom{n_2}{k-r} p_2^{k-r} (1-p_2)^{n_2-(k-r)}.$$

Con la convención frecuente de que $\binom{a}{b} = 0$ cada vez que $b > a$ o $b < 0$, podemos escribir la probabilidad anterior como

$$P(X=k)=\sum_{r=0}^{n_1}\binom{n_1}{r}p_1^r(1-p_1)^{n_1-r}\binom{n_2}{k-r}p_2^{k-r}(1-p_2)^{n_2-k+r}. \quad (4.6)$$

Por ejemplo, si $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.1$, $n_1 = n_2 = 10$ y $k = 2$, la probabilidad anterior se convierte en

$$P(X=2)=\sum_{r=0}^{2}\binom{10}{r}(0.2)^r(0.8)^{10-r}\binom{10}{2-r}(0.1)^{2-r}(0.9)^{8+r}=0.27,$$

después de un cálculo elemental.

Observación: Supongamos que $p_1 = p_2$. En este caso, la ecuación (4.6) se reduciría a $\binom{n}{k}p_1^k(1-p_1)^{n-k}$, puesto que ahora la variable aleatoria X *tiene* una distribución binomial. Para ver que esto es así, obsérvese que podemos escribir (puesto que $n_1 + n_2 = n$)

$$P(X=k)=p_1^k(1-p_1)^{n-k}\sum_{r=0}^{n_1}\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{k-r}.$$

Para mostrar que la suma anterior iguala $\binom{n}{k}$ compárense simplemente los coeficientes de las potencias de x^k en ambos lados de la identidad $(1+x)^{n_1}(1+x)^{n_2}=(1+x)^{n_1+n_2}$.

4.4 Variables aleatorias continuas

Supongamos que el recorrido de X está formado por un gran número finito de valores, por ejemplo, todos los valores x en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ de la forma $0, 0.01, 0.02, \ldots, 0.98, 0.99, 1.00$. Con cada uno de esos valores está asociado un número no negativo $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, cuya suma es igual a 1. Esta situación se representa geométricamente en la figura 4.7.

Hemos señalado antes que matemáticamente podría ser más fácil idealizar la anterior descripción probabilística de X al suponer que X puede tomar *todos* los valores posibles, $0 \leq x \leq 1$. Si hacemos esto, ¿qué le sucede a las probabilidades puntuales $p(x_i)$? Puesto que los valores posibles de X no son contables, en realidad no podemos hablar del i-ésimo valor de X

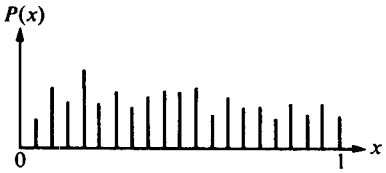


FIGURA 4.7

y, por lo tanto, $p(x_i)$ pierde significado.
Lo que haremos es sustituir la función p, definida sólo para $x_1, x_2, \ldots$, por una función f definida (en el contexto presente) para *todos* los valores de x, $0 \leq x \leq 1$. Las propiedades de la ecuación (4.3) se sustituirán por $f(x) \geq 0$ y $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Procederemos formalmente como sigue.

Definición. Se dice que X es una *variable aleatoria continua*, si existe una función f, llamada función de densidad de probabilidad (fdp) de X, que satisface las siguientes condiciones:

a) $f(x) \geq 0$ para toda x,

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.7}$$

c) Para cualquier a, b, tal que $-\infty < a < b < +\infty$,
tenemos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$ (4.8)

Observaciones: a) Fundamentalmente queremos decir que X es una variable aleatoria continua si X puede tomar todos los valores en algún intervalo (c, d), donde c y d pueden ser $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. La existencia estipulada de una fdp es un método matemático que tiene una base intuitiva considerable y hace más sencillos nuestros cálculos. En relación con esto, de nuevo se debe señalar que cuando suponemos que X es una variable aleatoria continua, estamos considerando la descripción *idealizada* de X.

b) $P(c < X < d)$ representa el área bajo la gráfica de la figura 4.8 de la fdp f entre $x = c$ y $x = d$.

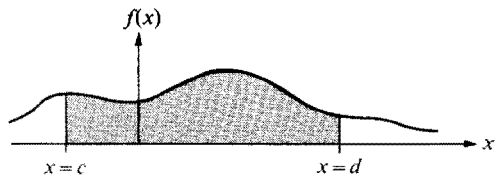


FIGURA 4.8

c) Una consecuencia de la descripción probabilística de X para *cualquier* valor específico de X, por ejemplo x_0, es que tenemos $P(X = x_0) = 0$, puesto que $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$. Este resultado puede parecer contrario a nuestra intuición. Debemos establecer, sin embargo, que si permitimos que

X tome *todos* los valores en un intervalo, entonces la probabilidad cero no es equivalente con la imposibilidad. Por tanto, en el caso continuo, $P(A) = \emptyset$ no implica $A = \theta$, el conjunto vacío. (Véase el teorema 1.1.) Para decirlo de un modo más informal, consideremos que elegimos un punto al azar en el segmento $\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$. Aunque quisiéramos estar de acuerdo (para fines matemáticos) con que *cada* punto concebible del segmento pudiese ser el resultado de nuestro experimento, nos sorprenderíamos mucho si en realidad escogiéramos precisamente el punto medio del segmento, o cualquier otro punto *específico* de ese elemento. Cuando indicamos esto en un lenguaje matemático preciso, decimos que el evento tiene "probabilidad 0". En vista de estas consideraciones, todas las siguientes probabilidades son *iguales* si X es una variable aleatoria continua:

$$P(c \leq X \leq d), \quad P(c \leq X < d), \quad P(c < X \leq d), y P(c < X < d).$$

d) Aunque aquí no verificaremos los detalles, se puede demostrar que la anterior asignación de probabilidades a los eventos en R_x satisface los axiomas básicos de probabilidades (Ec. 1.3), donde podemos tomar $\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$ como el espacio muestral.

e) Si una función f^* satisface las condiciones, $f^*(x) \geq 0$, para toda x, y $\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)dx = K$, donde K es un número positivo real (no necesariamente igual a 1), entonces f^* *no* satisface todas las condiciones para ser una fdp. Sin embargo, podemos definir con facilidad una nueva función, digamos f, en términos de f^* como sigue:

$$f(x) = \frac{f^*(x)}{K} \quad \text{para toda } x.$$

Por tanto, f satisface todas las condiciones de una fdp.

f) Si X sólo toma valores en un intervalo finito $[a, b]$, simplemente podemos establecer $f(x) = 0$ para todo $x \notin [a, b]$. Por tanto, la fdp está definida para *todos* los valores reales de x, y debemos exigir que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Cuando quiera que la fdp se especifique sólo para ciertos valores de x, supondremos que es cero para cualquier otro.

g) ¡$f(x)$ no representa la probabilidad de nada! Hemos observado que, por ejemplo, $P(X = 2) = 0$ y, por tanto, $f(2)$ ciertamente no representa esta probabilidad. Sólo cuando la función se integra entre dos límites produce una probabilidad. Sin embargo, podemos dar una interpretación de $f(x)\Delta x$ como sigue. Del teorema del valor medio del cálculo se deduce que

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(s)ds = \Delta x f(\xi), \quad x \leq \xi \leq x + \Delta x.$$

Si Δx es pequeña, $f(x)\Delta x$ es *aproximadamente* igual a $P(x \leq X \leq x+\Delta x)$. (Si f es continua por la derecha, esta aproximación llega a ser más segura cuando $\Delta x \to 0$.)

h) Deberíamos señalar de nueva cuenta que la distribución de probabilidades (en este caso la fdp es inducida en R_x por las probabilidades asociadas con eventos en S. Así, cuando escribimos $P(c < X < d)$, queremos decir, como siempre, $P[c < X(s) < d]$, que a su vez es igual a $P[s \mid c < X(s) < d]$, puesto que estos eventos son equivalentes. La definición anterior, ecuación (4.8), estipula esencialmente la existencia de una fdp$f$ definida en una R_x tal que

$$P[s \mid c < X(s) < d] = \int_c^d f(x)dx.$$

Nuevamente eliminaremos la naturaleza funcional de X y, por tanto, estaremos interesados sólo en R_x y la fdp f.

i) En el caso continuo, otra vez podemos considerar la siguiente *analogía con la mecánica:* supóngase que tenemos una masa total de una unidad, distribuida continuamente en el intervalo $a \leq x \leq b$. Entonces, $f(x)$ representa la densidad de la masa en el punto x y $\int_c^d f(x)dx$ representa la masa total contenida en el intervalo $c \leq x \leq d$.

EJEMPLO 4.11. En el análisis precedente sobre variable aleatoria continua se supuso la existencia de una fdp. Consideremos un ejemplo simple en el cual podamos determinar con facilidad la fdp haciendo una suposición apropiada acerca de la conducta probabilística de la variable aleatoria. Supóngase que escogemos un punto en el intervalo (0,1). Representemos la variable aleatoria X cuyo valor es la coordenada x del punto elegido.

Suposición: Si I es cualquier intervalo entre $(0,1)$, entonces la Prob $[X \in I]$ es directamente proporcional a la longitud de I, por ejemplo, $L(I)$. Esto es,Prob $[X \in I] = kL(I)$, donde k es la constante de proporcionalidad. (Es fácil ver, tomando $I = (0,1)$ y observando que $L((0,1)) = 1$ y Prob$[X \in (0,1)] = 1$, que $k = 1$.)

Obviamente X toma todos los valores en (0,1). ¿Cuál es su fdp? Esto es, ¿podemos encontrar una función f tal que

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx?$$

Nótese que si $a < b < 0$ o $1 < a < b$, $P(a < X < b) = 0$ y, por tanto, $f(x) = 0$. Si $0 < a < b < 1$, $P(a < X < b) = b - a$ y, por tanto, $f(x) = 1$. Así encontramos

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{para cualquier otro valor.} \end{cases}$$

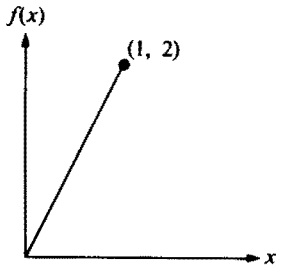


FIGURA 4.9

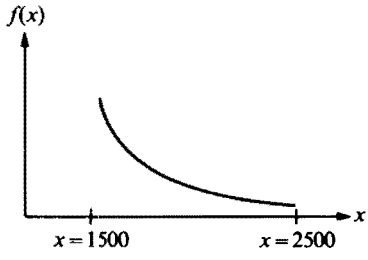


FIGURA 4.10

EJEMPLO 4.12. Supóngase que la variable aleatoria X es continua. (Véase la Fig. 4.9) Sea la fdp f dada por

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1,$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Claramente, $f(x) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = 1$. Para calcular $P(X \leq \frac{1}{2})$, sólo debemos evaluar la integral $\int_0^{1/2}(2x)dx = \frac{1}{4}$.

El concepto de probabilidad condicional tratado en el capítulo 3 se puede aplicar con propiedad a las variables aleatorias. Así, en el ejemplo anterior debimos evaluar $P(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})$. Aplicando de manera directa la definición de probabilidad individual, tenemos

$$P(X \leq \tfrac{1}{2} \mid \tfrac{1}{3} \leq X \leq \tfrac{2}{3}) = \frac{P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2})}{P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3})}$$

$$= \frac{\int_{1/3}^{1/2} 2x\,dx}{\int_{1/3}^{2/3} 2x\,dx} = \frac{5/36}{1/3} = \frac{5}{12}.$$

EJEMPLO 4.13. Sea X la duración (en horas) de cierto tipo de bombilla eléctrica. Supóngase que X es una variable aleatoria continua y supóngase que la fdp f de X está dada por

$$f(x) = a/x^3, \quad 1500 \leq x \leq 2500,$$
$$= 0, \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

(Es decir, asignamos probabilidad cero al evento $\{X \leq 1500\}$ y $\{X > 2500\}$.) Para evaluar la constante a, debemos acudir a la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, que en este caso se convierte en $\int_{1500}^{2500} a/x^3\, dx = 1$. De esto obtenemos $a = 7,031,250$. La gráfica de f aparece en la figura 4.10.

En un capítulo posterior estudiaremos detalladamente diversas variables aleatorias importantes, discretas y continuas. Mediante el uso de los modelos deterministas sabemos que ciertas funciones desempeñan un papel mucho más importante que otras. Por ejemplo, las funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y trigonométricas tienen un papel primordial al describir modelos deterministas. Al desarrollar los modelos no deterministas (es decir, probabilísticos) encontraremos que ciertas variables aleatorias son particularmente importantes.

4.5 Función de distribución acumulativa

En este capítulo presentaremos otro importante concepto general.

Definición. Sea X una variable aleatoria, discreta o continua. Definimos que F es la *función de distribución acumulativa* de la variable aleatoria X (abreviada fda) como $F(x) = P(X \leq x)$.

Teorema 4.2. *a*) Si X es una variable aleatoria discreta,

$$f(x) = \sum_j p(x_j), \tag{4.9}$$

donde la suma se toma sobre todos los índices j que satisfacen $x_j \leq x$.

b) Si X es una variable aleatoria continua con fdp f,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds. \tag{4.10}$$

Demostración: Ambos resultados se deducen inmediatamente de la definición.

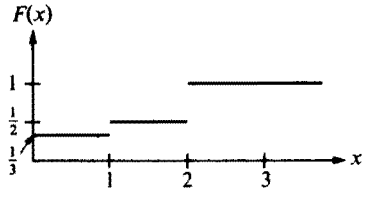


FIGURA 4.11

EJEMPLO 4.14. Supongamos que la variable aleatoria X toma los tres valores 0,1, y 2 con probabilidades $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x < 0, \\ &= \tfrac{1}{3} \quad \text{si} \quad 0 \leq x < 1, \\ &= \tfrac{1}{2} \quad \text{si} \quad 1 \leq x < 2, \\ &= 1 \quad \text{si} \quad x \geq 2, \end{aligned}$$

(Nótese que es muy importante indicar la inclusión o exclusión de los puntos extremos al describir los diversos intervalos.) La gráfica de F se presenta en la figura 4.11.

EJEMPLO 4.15. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con fdp

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x, \quad 0 < x < 1, \\ &= 0, \quad \text{para cualquier otro valor.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fda F está dada por

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x \leq 0, \\ &= \int_0^x 2s\, ds = x^2 \\ &\qquad \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ &= 1 \quad \text{si} \quad x > 1. \end{aligned}$$

La gráfica correspondiente aparece en la figura 4.12.

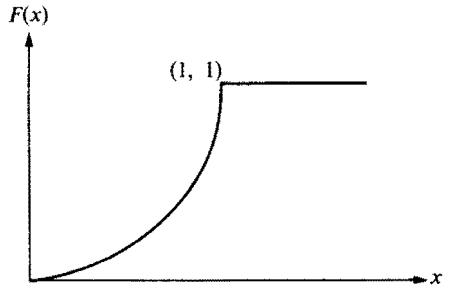


FIGURA 4.12

Las gráficas obtenidas en las figuras 4.11 y 4.12 para las fda (en cada uno de los casos) son típicas en el siguiente sentido.

a) Si X es una variable aleatoria discreta con un número finito de valores posibles, la gráfica de la fda F se formará de trazos horizontales (se llama función escalonada). La función F es continua excepto para los valores posibles de X, llamados $x_1, \ldots, x_n$. En el valor x_j la gráfica tendrá un "salto" de magnitud $p(x_j) = P(X = x_j)$.

b) Si X es una función aleatoria continua, F será una función continua para toda x.

c) La fda F está definida para *todos* los valores de x, lo cual es una razón importante para considerarla.

Hay dos propiedades fundamentales de la fda que resumiremos en el teorema siguiente.

Teorema 4.3. *a*) La función F es no decreciente. Esto es si $x_1 \leq x_2$, tenemos $F(x_1) \leq F(x_2)$.

b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. [A menudo esto lo escribimos como $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$.]

Demostración: a) Definamos los eventos A y B como sigue: $A = \{X \leq x_1\}$, $B = \{X \leq x_2\}$. Entonces, puesto que $x_1 \leq x_2$, tenemos $A \subset B$ y por el teorema 1.5, $P(A) \leq P(B)$, que es el resultado requerido.

b) En el caso continuo tenemos

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = 0,$$

$$F(\infty) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds = 1.$$

En el caso discreto el argumento es análogo.

La función de distribución acumulativa es importante por varias razones. Esto es particularmente cierto cuando tratamos con una variable aleatoria continua, porque en este caso no podemos estudiar la conducta probabilística de X al calcular $P(X = x)$. Esa probabilidad siempre es igual a cero en el caso continuo. Sin embargo, podemos inquirir acerca de $P(X \leq x)$ y, como lo demostramos en el próximo teorema, obtener la fdp de X.

Teorema 4.4. *a*) Sea F la fda de una variable aleatoria continua con fdp f. Luego,

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x),$$

para toda x en la cual F es diferenciable.

b) Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots$, y supongamos que es posible rotular esos valores de modo que $x_1 < x_2 < \cdots$ Sea F la fda de X. Entonces,

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1}). \tag{4.12}$$

Demostración: a) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$. Así, aplicando al teorema fundamental del cálculo, obtenemos $F'(x) = f(x)$.

b) Puesto que supusimos $x_1 < x_2 < \ldots$, tenemos

$$\begin{aligned} F(x_j) &= P(X = x_j \cup X = x_{j-1} \cup \cdots \cup X = x_1) \\ &= p(x_j) + p(x_{j-1}) + \cdots + p(x_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_{j-1}) &= P(X = x_{j-1} \cup X = x_{j-2} \cup \cdots \cup X = x_1) \\ &= p(x_{j-1}) + p(x_{j-2}) + \cdots + p(x_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $F(x_j) - F(x_{j-1}) = P(X = x_j) = p(x_j)$.

Observación: Reconsideremos brevemente *a*) del teorema anterior. Recordemos la definición de derivada de la función F:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{P(X \leq x+h) - P(X \leq x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}[P(x < X \leq x+h)].$$

Así, si h es pequeña y positiva,

$$F'(x) = f(x) \cong \frac{P(x < X \leq x+h)}{h}.$$

Es decir, $f(x)$ es aproximadamente igual a la "cantidad de probabilidad en el intervalo $(x, x+h)$ por longitud h". De aquí el nombre de *función de densidad de probabilidad.*

EJEMPLO 4.16. Supongamos que una variable aleatoria continua tiene fda F dada por

$$F(x) = 0, \quad x \leq 0,$$
$$= 1 - e^{-x}, \quad x > 0.$$

Entonces, $F'(x) = e^{-x}$ para $x > 0$, y así la fdp f es dada por

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Observación: Una advertencia sobre la terminología puede ser de utilidad. Esta terminología, aunque no es muy uniforme, ha llegado a estandarizarse. Cuando hablamos de la *distribución de probabilidades* de una variable aleatoria X indicamos su fdp f si X es continua, o de su función de probabilidad puntual p definida para $x_1, x_2, \ldots$ si X es discreta. Cuando hablamos de la función de distribución acumulativa, o algunas veces sólo de la *función de distribución*, siempre nos referimos a F, donde $F(x) = P(X \leq x)$.

4.6 Distribuciones mixtas

Hemos restringido nuestra exposición sólo a variables aleatorias discretas o continuas. Tales variables aleatorias ciertamente son las más importantes en las aplicaciones. Sin embargo, hay situaciones en las cuales

podemos encontrar variables del tipo *mixto*: la variable aleatoria X puede tomar ciertos valores distintos, por ejemplo, $x_1, \ldots, x_n$, con probabilidad positiva y tomar también todos los valores en algún intervalo, por ejemplo, $a \leq x \leq b$. La distribución de probabilidades de tales variables aleatorias se obtendría al combinar las ideas consideradas anteriormente para la descripción de las variables aleatorias discretas y continuas como sigue. A cada uno de los valores x_i se le asigna un número $p(x_i)$ tal que $p(x_i) \geq 0$, para toda i, y tal que $\Sigma_{i=1}^{n} p(x_i) = p < 1$. Entonces definimos una función f que satisface $f(x) \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx = 1 - p$. Para toda a, b, con $-\infty < a < c < +\infty$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx + \sum_{\{i:a \leq x_i \leq b\}} p(x_i).$$

De esta manera satisfacemos la condición

$$P(S) = P(-\infty < X < \infty) = 1.$$

Una variable aleatoria del tipo mixto puede aparecer como sigue. Supóngase que estamos probando un equipo y X es el tiempo de funcionamiento. En la mayoría de los problemas describiríamos X como una variable aleatoria continua con valores posibles $x \geq 0$. Sin embargo, hay algunos casos en los cuales hay una probabilidad positiva de que el artículo no funcione del todo, es decir, falla al tiempo $X = 0$. En tal caso desearíamos modificar nuestro modelo y asignar una probabilidad positiva, por ejemplo p, al resultado $X = 0$. Por tanto, tendríamos $P(X = 0) = p$ y $P(X > 0) = 1 - p$. Así, el número p describiría la distribución de X en 0, mientras que la fdp f describiría la distribución de valores de $X > 0$ (Fig. 4.13).

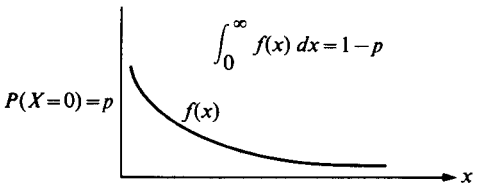


FIGURA 4.13

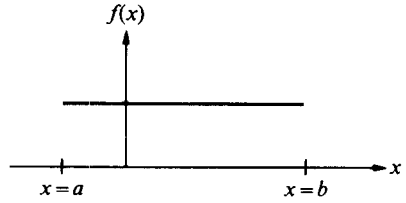


FIGURA 4.14

4.7 Variables aleatorias distribuidas uniformemente

En los capítulos 8 y 9 estudiaremos con detalle algunas importantes variables aleatorias discretas y continuas. Ya hemos presentado la relevancia de la variable aleatoria binomial. Ahora consideremos brevemente una variable continua también importante.

Definición. Supongamos que X es una variable aleatoria continua que toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, donde ambos, a y b, son finitos. Si la fdp de X está dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor} \tag{4.13}$$

decimos que X está *distribuida uniformemente* en el intervalo $[a, b]$. (Véase la Fig. 4.14.)

Observaciones: a) Una variable aleatoria distribuida uniformemente tiene una fdp que es una *constante* en el intervalo de definición. A fin de satisfacer la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, esta constante debe ser igual al recíproco de la longitud del intervalo.

b) Una variable aleatoria distribuida uniformemente representa el término continuo análogo a los resultados igualmente posibles en el sentido siguiente. Para cualquier subintervalo $[c, d]$, donde $a \leq c < d \leq b$, $P(c \leq X \leq d)$ es la *misma* para todos los subintervalos que tienen la misma longitud. Esto es,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

y así sólo depende de la longitud del intervalo y no de la ubicación de éste.

c) Ahora podemos precisar la noción intuitiva de *elegir un punto P al azar* en un intervalo, por ejemplo $[a, b]$. Con esto sólo indicaremos que la coordenada x del punto elegido, por ejemplo X, está distribuida uniformemente en $[a, b]$.

EJEMPLO 4.17. Se elige al azar un punto sobre el segmento de línea [0,2]. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto escogido quede entre 1 y $\frac{3}{2}$?

Representando la coordenada del punto elegido por X, tenemos que la fdp de X está dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 < x < 2$ y, por tanto, $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$.

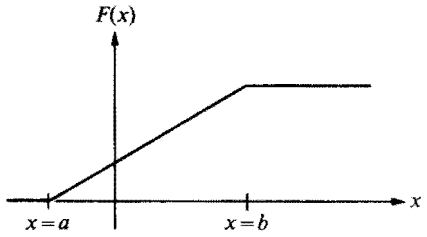


FIGURA 4.15

EJEMPLO 4.18. Se puede suponer que la dureza, digamos H, de una muestra de acero (medida en la escala Rockwell) es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente sobre [50,70] en la escala B. Por tanto,

$$f(h) = \tfrac{1}{20}, \quad 50 < h < 70,$$
$$= 0 \qquad \text{para cualquier otro valor.}$$

EJEMPLO 4.19. Obtengamos una expresión para la fda de una variable aleatoria distribuida uniformemente

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$$
$$= 0 \qquad \text{si} \quad x < a,$$
$$= \frac{x-a}{b-a} \qquad \text{si} \quad a \leq x < b,$$
$$= 1 \qquad \text{si} \quad x \geq b.$$

La gráfica correspondiente aparece en la figura 4.15.

4.8 Una observación

Hemos señalado varias veces que en alguna etapa del desarrollo de nuestro modelo probabilístico deben asignarse algunas probabilidades a los resultados sobre la base de alguna evidencia experimental (como es la frecuencia relativa, por ejemplo) o algunas otras consideraciones, tales

como experiencias pasadas con los fenómenos estudiados. El interrogante siguiente se le podría presentar al estudiante: ¿por qué no podríamos obtener todas las probabilidades en las cuales estamos interesados por un medio no deductivo? La respuesta es que muchos eventos cuyas probabilidades deseamos conocer, son tan complicados que nuestro conocimiento intuitivo es insuficiente. Por ejemplo, supongamos que diariamente salen 1000 artículos de una línea de producción, algunos de ellos son defectuosos. Deseamos conocer la probabilidad de tener 50 o más artículos defectuosos en un día dado. Aun si estamos familiarizados con el comportamiento general del proceso de producción, nos podría ser difícil asociar una medida cuantitativa al evento: 50 o menos artículos son defectuosos. Sin embargo, podríamos afirmar que individualmente cualquier artículo tenía la probabilidad 0.10 de ser defectuoso. (Esto es, las experiencias anteriores nos permiten saber que cerca del 10% de los artículos son defectuosos.) Aún más, podríamos suponer que los artículos individuales son defectuosos o no defectuosos, independientemente uno de otro. *Ahora* podemos proceder de manera deductiva y *derivar* la probabilidad del evento que se considera. Esto es, si X = número de defectuosos,

$$P(X \leq 50) = \sum_{k=0}^{50} \binom{1000}{k} (0.10)^k (0.90)^{1000-k}.$$

Lo que aquí se destaca es que los diversos métodos para calcular probabilidades que hemos derivado (y los que estudiaremos posteriormente) són de mucha importancia, puesto que con ellos podemos calcular las probabilidades asociadas con eventos más complicados, lo cual sería difícil de obtener con medios intuitivos o empíricos.

PROBLEMAS

4.1. Se sabe que al lanzar una moneda, a menudo sale cara tres veces más que sello. Esta moneda se lanza tres veces. Sea X el número de caras que aparecen, establecer la distribución de probabilidades de X, así como la fda. Hacer una gráfica de ambas.

4.2. De un lote que contiene 25 artículos, 5 de los cuales son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados, obtener la distribución de probabilidades de X si

a) los artículos se escogen con sustitución,
b) los artículos se escogen sin sustitución.

4.3. Supóngase que la variable aleatoria X tiene valores posibles $1, 2, 3, \ldots$, y $P(X = j) = 1/2^j$, $j = 1, 2, \ldots$

a) Calcular $P(X$ es par$)$.

b) Calcular $P(X \geq 5)$.

c) Calcular $P(X$ es divisible entre 3$)$.

4.4. Considérese una variable aleatoria X con resultados posibles: $0, 1, 2, \ldots$ Suponer que $P(X = j) = (1 - a)a^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

a) ¿Para qué valores de a es significativo el modelo anterior?

b) Verificar que lo anterior representa una distribución de probabilidades legítima.

c) Demostrar que para dos enteros positivos cualesquiera s y t,

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X \geq t).$$

4.5. Supóngase que la máquina 1 produce (diariamente) el doble de artículos que la máquina 2. Sin embargo, cerca del 4% de los artículos de la máquina 1 tiende a ser defectuoso, mientras que la máquina 2 sólo produce alrededor de 2% defectuosos. Supongamos que se combina la producción diaria de las dos máquinas. Se toma una muestra aleatoria de diez del resultado combinado. ¿Cuál es la probabilidad de que esta muestra contenga dos defectuosos?

4.6. Se lanza una serie de cohetes hasta que ocurre el primer lanzamiento exitoso. Si esto no sucede en cinco ensayos, el experimento se detiene y se inspecciona el equipo. Supóngase que hay una probabilidad constante de 0.8 de tener un lanzamiento exitoso y que los ensayos sucesivos son independientes. Además, el costo del primer lanzamiento es K dólares, mientras que los siguientes cuestan $K/3$ dólares. Cada vez que hay un lanzamiento exitoso, se obtiene cierta cantidad de información que puede expresarse como una ganancia financiera de C dólares. Si T es el costo neto del experimento, encontrar la distribución de probabilidades de T.

4.7. Calcular $P(X = 5)$, donde X es la variable aleatoria definida en el ejemplo 4.10. Supongamos que $n_1 = 10$, $n_2 = 15$, $p_1 = 0.3$ y $p_2 = 0.2$.

4.8. (*Propiedades de las probabilidades binomiales.*) En la exposición del ejemplo 4.8 se sugirió un modelo general para las probabilidades binomiales $\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$. Indicar estas probabilidades por $p_n(k)$.

a) Demostrar que para $0 \leq k < n$ tenemos

$$p_n(k + 1)/p_n(k) = [(n - k)/(k + 1)][p/(1 - p)].$$

b) Usando *a*), demostrar que

i) $p_n(k + 1) > p_n(k)$ si $k < np - (1 - p)$,

ii) $P_n(k+1) = p_n(k)$ si $k = np - (1-p)$,
iii) $p_n(k+1) < p_n(k)$ si $k > np - (1-p)$.

c) Demostrar que si $np - (1-p)$ es un entero, $p_n(k)$ toma su valor máximo para dos valores de k, llamados $k_0 = np - (1-p)$ y $k_0' = np - (1-p) + 1$.

d) Demostrar que si $np - (1-p)$ no es un entero, entonces $p_n(k)$ toma su valor máximo cuando k es igual al entero más pequeño mayor que k_0.

e) Demostrar que si $np - (1-p) < 0$, $P_n(0) > P_n(1) > \cdots > P_n(n)$, mientras que si $np - (1-p) = 0$, $P_n(0) = P_n(1) > P_n(2) > \cdots > P_n(n)$.

4.9. La variable aleatoria continua X tiene fdp $f(x) = x/2, 0 \leq x \leq 2$. Se hacen dos determinaciones independientes de X. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas determinaciones sean mayores que 1? Si se han hecho tres determinaciones independientes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente dos sean mayores que 1?

4.10. Sea X la duración de un tubo electrónico y supongamos que X se puede representar como una variable aleatoria continua con fdp $f(x) = be^{-bx}, x \geq 0$. Sea $p_j = P(j \leq X \leq j+1)$. Demostrar que p_j es de la forma $(1-a)a^j$ y determinar a.

4.11. La variable aleatoria continua X tiene la fdp $f(x) = 3x^2, -1 \leq x \leq 0$. Si b es un número que satisface $-1 < b < 0$, calcular $P(X > b \mid X < b/2)$.

4.12. Supóngase que f y g son fdp en el mismo intervalo, $a \leq x \leq b$.

a) Demostrar que $f + g$ *no* es una fdp en ese intervalo.
b) Demostrar que para todo número $\beta, 0 < \beta < 1$, $\beta f(x) + (1-\beta)g(x)$ es una fdp en ese intervalo.

4.13. Suponer que la gráfica de la figura 4.16 representa la fdp de una variable aleatoria X.

a) ¿Cuál es la relación entre a y b?

b) Si $a > 0$ y $b > 0$, ¿qué puede decir acerca del mayor valor que puede tomar b? (Véase Fig. 4.16.)

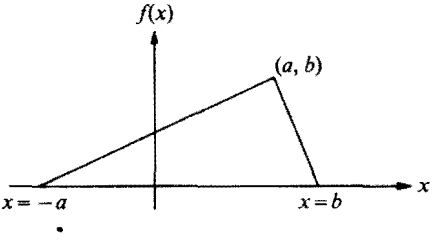


FIGURA 4.16

4.14. El porcentaje de alcohol ($100X$) en cierto compuesto se puede considerar como una variable aleatoria, donde X, $0 < X < 1$, tiene la siguiente fdp:

$$f(x) = 20x^3(1-x), \quad 0 < x < 1.$$

a) Obtener una expresión para fda F y dibujar su gráfica.
b) Calcular $P(X \leq \frac{2}{3})$.
c) Supóngase que el precio de venta del compuesto anterior depende del contenido de alcohol. Específicamente, si $\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}$, el compuesto se vende en C_1 dólares/galón; de otro modo se vende en C_2 dólares por galón. Si el costo es C_3 dólares/galón, encontrar la distribución de probabilidades de la utilidad neta por galón.

4.15. Sea X una variable aleatoria continua con fdp f dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ &= a, \quad 1 \leq x \leq 2, \\ &= -ax + 3a, \quad 2 \leq x \leq 3, \\ &= 0, \qquad \text{para cualquier otro valor.} \end{aligned}$$

a) Determinar la constante a.
b) Determinar F, la fda y dibujar la gráfica.
c) Si X_1, X_2, y X_3 son tres observaciones independientes de X ¿cuál es la probabilidad de que exactamente uno de esos tres números sea mayor que 1.5?

4.16. Se supone que el diámetro de un cable eléctrico, digamos X, es una variable aleatoria continua con fdp $f(x) = 6x(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$.
a) Verificar que la anterior es una fdp y dibujarla.
b) Obtener una expresión para la fdp de X y dibujarla.
c) Determinar un número b, tal que $P(X < b) = 2P(X > b)$.
d) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$.

4.17. Cada una de las siguientes funciones representa la fda de una variable aleatoria continua. En cada caso $F(x) = 0$ para $x < a$ y $F(x) = 1$ para $x > b$, donde $[a, b]$ es el intervalo indicado. En cada uno de los casos, dibujar la función F, determinar la fdp f y dibujarla. También verificar que f es una fdp.

a) $F(x) = x/5, 0 \leq x \leq 5$
b) $F(x) = (2/\pi)\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x}), 0 \leq x \leq 1$
c) $F(x) = e^{3x}, -\infty < x \leq 0$
d) $F(x) = x^3/2 + \frac{1}{2}, -1 \leq x \leq 1$.

4.18. Sea X la duración de un instrumento electrónico (medida en horas). Supóngase que X es una variable aleatoria continua con fdp $f(x) = k/x^n, 2000 \leq x \leq 10000$.

a) Para $n = 2$, determinar k.
b) Para $n = 3$, determinar k.

c) Para n en general, determinar k.

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el instrumento falle antes de 5000 horas de funcionamiento?

e) Dibujar la fda $F(t)$ para *c*) y determinar su forma algebraica.

4.19. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con base en diez repeticiones de un experimento. Si $p = 0.3$, calcular las siguientes probabilidades usando la tabla de la distribución binomial del Apéndice.

a) $P(X \leq 8)$ *b*) $P(X = 7)$ *c*) $P(X > 6)$.

4.20. Supóngase que X está distribuida uniformemente en $[-\alpha, +\alpha]$, donde $\alpha > 0$. Cada vez que sea posible, determinar α de modo que se satisfaga lo siguiente.

a) $P(X > 1) = \frac{1}{3}$ *b*) $P(X > 1) = \frac{1}{2}$ *c*) $P(X < \frac{1}{2}) = 0.7$

d) $P(X < \frac{1}{2} = 0.3$ *e*) $P(|X| < 1) = P(|X| > 1)$.

4.21. Suponiendo que X está distribuida uniformemente en $[0, \alpha], \alpha > 0$ responder las preguntas del problema 4.20.

4.22. Se escoge un punto al azar de un segmento de longitud L. ¿Cuál es la probabilidad de que la razón del segmento más corto en relación con el más largo sea menor que $\frac{1}{4}$?

4.23. Una fábrica produce diariamente diez recipientes de vidrio. Se puede suponer que hay una probabilidad constante $p = 0.1$ de producir uno defectuoso. Antes de que estos depósitos se almacenen son inspeccionados y a los defectuosos se les aparta. Supongamos que hay una probabilidad constante $r = 0.1$ de que un recipiente defectuoso sea mal clasificado. Sea X igual al número de recipientes clasificados como defectuosos al término de un día de producción. (Suponemos que todos los recipientes que se fabrican en un día se inspeccionan ese mismo día.)

a) Calcular $P(X = 3)$ y $P(X > 3)$,

b) Obtener una expresión para $P(X = k)$.

4.24. Supóngase que el 5% de los artículos que salen de una línea de producción son defectuosos. Se escogen diez de ellos y se inspeccionan. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren cuando mucho dos defectuosos?

4.25. Suponer que la duración (en horas) de cierto tubo de radio es una variable aleatoria continua X con fdp $f(x) = 100/x^2, x > 100$ y 0 para cualquier otro valor.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tubo dure menos de 200 horas si se sabe que el tubo todavía funciona después de 150 horas de servicio?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que si se instalan tres de esos tubos en un conjunto, exactamente uno tenga que ser sustituido después de 150 horas de servicio?

c) ¿Cuál es el número máximo de tubos que se pueden poner en un conjunto de modo que haya una probabilidad 0.5 de que después de 150 horas de servicio funcionen todavía?

4.26. Un experimento consta de n ensayos independientes. Se puede suponer que debido al "aprendizaje", la probabilidad de obtener un resultado exitoso aumenta con el número de ensayos realizados. Específicamente, supongamos que $P(\text{éxito en la } i\text{-ésima repetición}) = (i+1)/(i+2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de tener tres resultados exitosos por lo menos en ocho repeticiones?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer resultado exitoso ocurra en la octava repetición?

4.27. Refiriéndonos al ejemplo 4.9,

a) calcular $P(X = 2)$ si $n = 4$,

b) para un n arbitrario, demostrar que $P(X = n - 1) = P$ (exactamente un intento no exitoso) es igual a $[1/(n+1)]\Sigma_{i=1}^{n}(1/i)$.

4.28. Si la variable aleatoria K está distribuida uniformemente en (0.5), ¿cuál es la probabilidad de que las raíces de la ecuación $4x^2 + 4xK + K + 2 = 0$ sean reales?

4.29. Supóngase que la variable aleatoria X tiene valores posibles $1, 2, 3, \ldots$ y que $P(X = r) = k(1-\beta)^{r-1}$, $0 < \beta < 1$.

a) Determinar la constante k.

b) Encontrar la *moda* de esta distribución (es decir, el valor de r que da el mayor valor de $P(X = r)$).

4.30. Una variable aleatoria X puede tomar cuatro valores con probabilidades $(1 + 3x)/4$, $(1 - x)/4$, $(1 + 2x)/4$, y $(1 - 4x)/4$. ¿Para qué valores de X es ésta una distribución de probabilidades?

5

Funciones de variables aleatorias

5.1 Un ejemplo

Supongamos que el radio X de la entrada de un tubo muy bien calibrado se considera como una variable aleatoria continua con fdp f. Sea $A = \pi X^2$ el área de la sección de la entrada; entonces es evidente que, puesto que el valor de X es el resultado de un experimento aleatorio, también lo es el valor de A. Es decir, A es una variable aleatoria (continua), y podríamos obtener su fdp, digamos g. Esperaríamos que, puesto que A es una función de X, la fdp g se puede derivar de alguna manera conociendo la fdp f. En este capítulo trataremos problemas de esta naturaleza. Antes de familiarizarnos con algunas técnicas específicas necesarias, formularemos los conceptos anteriores con mayor precisión.

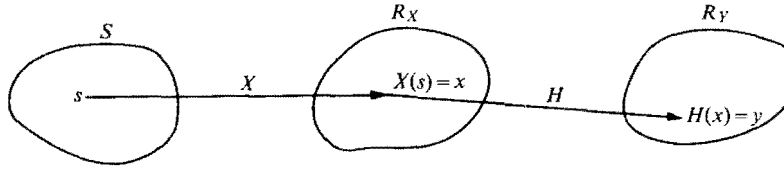


FIGURA 5.1

5.2 Eventos equivalentes

Sean ε un experimento, S un espacio muestral asociado con ε y X una variable aleatoria definida en S;

supongamos que $y = H(x)$ es una función real de x. Entonces, $Y = H(X)$ es una variable aleatoria puesto que para cada $s \in S$ se determina un valor de Y, digamos $y = H[X(s)]$. Esto se representa en forma esquemática en la figura 5.1. Como antes, llamamos R_x al espacio del intervalo de X, el conjunto de valores posibles de la función X. De igual modo, definimos como R_y el *espacio del intervalo de la variable aleatoria* Y, el conjunto de valores posibles de Y. Previamente (ecuación 4.1) definimos la noción de eventos equivalentes en S y en R_x. Extendamos ahora este concepto de la siguiente manera natural.

Definición. Sea C un evento (subconjunto) asociado con el recorrido de Y, R_y, como se describió anteriormente. Defínase $B \subset R_x$ como sigue:

$$B = \{x \in R_x : H(x) \in C\}. \tag{5.1}$$

En palabras, B es el conjunto de los valores de X tales que $H(x) \in C$. Si B y C están relacionados de esta manera los llamamos eventos *equivalentes*.

Observaciones: a) Como dijimos antes, la interpretación informal de lo anterior es que B y C son eventos equivalentes si y sólo si B y C ocurren juntas. Esto es, cuando ocurre B, ocurre C y recíprocamente.

b) Supóngase que A es un evento asociado con S, el cual es equivalente a un evento B asociado con R_x. Por lo tanto, si C es un evento asociado con R_y que es equivalente a B, tenemos que A es equivalente a C.

c) Nuevamente es importante darse cuenta de que cuando hablamos de eventos equivalentes (en el sentido anterior), esos eventos están asociados con espacios muestrales diferentes.

EJEMPLO 5.1. Supongamos que $H(x) = \pi x^2$ como en la sección 5.1. Luego, los eventos $B : \{X > 2\}$ y $C : \{Y > 4\pi\}$ son equivalentes, porque si $Y = \pi X^2$, entonces $\{X > 2\}$ ocurre si y sólo si $\{Y > 4\pi\}$ ocurre, puesto que en el presente contexto, X no puede tomar valores negativos. (Véase la Fig. 5.2.)

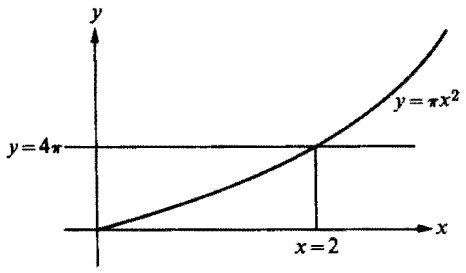


FIGURA 5.2

Observación: Otra vez es importante señalar que se usa una notación abreviada cuando escribimos expresiones como $\{X > 2\}$ y $\{Y > 4\pi\}$. Por supuesto, nos estamos refiriendo a los valores de X y a los valores de Y, o sea, $\{s \mid X(s) > 2\}$ y $\{x \mid Y(x) > 4\pi\}$.

Como hicimos en el capítulo 4 (Ec. 4.2), nuevamente haremos la definición siguiente.

Definición. Sean X una variable aleatoria definida en el espacio muestral S, R_x el recorrido de X y H una función real, y consideremos la variable aleatoria $Y = H(X)$ con recorrido R_y. Para cualquier evento $C \subset R_y$, *definimos* $P(C)$ como sigue:

$$P(C) = P[\{x \in R_x : H(x) \in C\}]. \tag{5.2}$$

En palabras, la probabilidad de un evento asociado con el recorrido de Y está definida como la probabilidad del evento equivalente (en términos de X), como aparece en la ecuación (5.2).

Observaciones: a) La definición anterior hará posible calcular las probabilidades relacionadas con eventos con Y si conocemos la distribución de probabilidades de X y podemos determinar el evento equivalente en cuestión.

b) Puesto que lo tratado previamente (ecuaciones 4.1 y 4.2 relaciona probabilidades asociadas con R_x con probabilidades asociadas con S, podemos escribir la ecuación (5.2) como sigue:

$$P(C) = P[\{x \in R_x : H(x) \in C\}] = P[\{s \in S : H(X(s)) \in C\}].$$

EJEMPLO 5.2. Sea X una variable aleatoria continua con fdp

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

(Una integración sencilla indica que $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$.)

Supóngase que $H(x) = 2x + 1$. Por tanto, $R_X = \{x \mid x > 0\}$, mientras que $R_Y = \{y \mid y > 1\}$. Supóngase que el evento C está definido como sigue: $C = \{Y \geq 5\}$. Ahora, $y \geq 5$ si y sólo si $2x+1 \geq 5$, lo que a su vez da $x \geq 2$. Por lo tanto, C es equivalente a $B = \{X \geq 2\}$. (Véase la Fig. 5.3.) Ahora, $P(X \geq 2) = \int_2^\infty e^{-x}dx = 1/e^2$. Por lo tanto, aplicando la ecuación (5.2) encontramos que

$$P(Y \geq 5) = 1/e^2$$

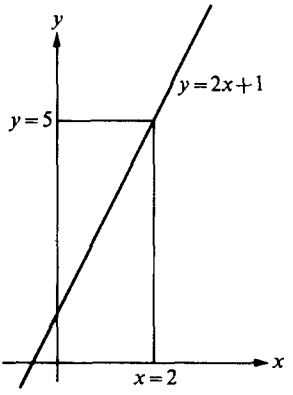


FIGURA 5.3

Observaciones: a) Nuevamente conviene señalar que hay que considerar incorporar la evaluación de $x = X(s)$ y la evaluación de $y = H(x)$ en nuestro experimento y, por tanto, considerar simplemente R_Y, el recorrido de Y, como el espacio muestral de nuestro experimento.

Estrictamente hablando, el espacio muestral del experimento es S y el resultado del experimento es s. Todo lo que hagamos a continuación no está influido por la naturaleza aleatoria del experimento. La determinación de $x = X(s)$ y la evaluación de $y = H(x)$ son estrictamente procesos deterministas una vez que se ha observado s. Sin embargo, como vimos antes, podemos incorporar estos cálculos en la descripción de nuestro experimento y así relacionarlos directamente con el recorrido R_Y.

b) Así como la distribución de probabilidades se indujo en R_X por la distribución de probabilidades sobre el espacio muestral original S, de igual manera la distribución de probabilidades de Y se determina si se conoce la distribución de probabilidades de X. Así en el ejemplo 5.2 la distribución específica de X determinó completamente el valor de $P(Y \geq 5)$.

c) Al considerar la función de una variable aleatoria X, digamos $Y = H(X)$, debemos comentar que no se puede permitir toda función H concebible. Sin embargo, las funciones que aparecen en las aplicaciones están inevitablemente entre aquellas que podemos considerar y, por tanto, más adelante no nos referiremos a esta pequeña dificultad.

5.3 Variables aleatorias discretas

Caso 1 . X es una variable aleatoria discreta. Si X es una variable

aleatoria discreta y $Y = H(X)$, entonces de inmediato se deduce que Y es también una variable aleatoria discreta.

Porque supóngase que los valores posibles de X se pueden enumerar como $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Con seguridad, los valores posibles de Y se pueden enumerar como $y_1 = H(x_1), y_2 = H(x_2), \ldots$ (Algunos de los valores anteriores de Y pueden ser iguales, pero esto ciertamente no impide el hecho de que esos valores puedan enumerarse.)

EJEMPLO 5.3. Supóngase que la variable aleatoria X toma los tres valores $-1, 0$ y 1 con probabilidades $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente. Sea $Y = 3X + 1$, entonces los valores posibles de Y son $-2, 1$ y 4, cuyas probabilidades se supone que son $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$.

Este ejemplo sugiere el siguiente *procedimiento general*: si $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ son los valores posibles de X, $p(x_i) = P(X = x_i)$ y H es una función tal que a cada valor de y le corresponda exactamente un valor de x, entonces la distribución de probabilidades de Y se obtiene como sigue:

$$\text{Valores posibles de } Y: \quad y_i = H(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \ldots;$$

$$\text{Probabilidades de } Y: \quad q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_i).$$

A menudo, la función H no tiene la característica anterior, y puede suceder que varios valores de X den el mismo valor de Y, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5.4. Supóngase que consideramos la misma variable aleatoria X como en el ejemplo 5.3. Sin embargo, introducimos $Y = X^2$. En este caso, los valores posibles de Y son 0 y 1, cuyas probabilidades se supone que son $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, porque $Y = 1$ si y sólo si $X = -1$ o $X = 1$ y la probabilidad de este último evento es $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Debido a nuestra terminología anterior, los eventos $B: \{X = \pm 1\}$ y $C: \{Y = 1\}$ son eventos equivalentes y, por lo tanto, según la ecuación (5.2), tienen probabilidades iguales.

El *procedimiento general* para situaciones como la descrita en el ejemplo anterior es el que sigue: representemos con $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, \ldots$, los valores de X que tienen la propiedad $H(x_{i_j}) = y_i$ para toda j. Luego,

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_{i_1}) + p(x_{i_2}) + \cdots$$

En palabras, para calcular la probabilidad del evento $\{Y = y_i\}$, encuentre el evento equivalente en términos de X (en el recorrido R_X) y luego agregue todas las probabilidades correspondientes. (Véase la Fig. 5.4)

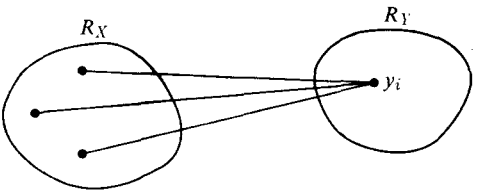


FIGURA 5.4

EJEMPLO 5.5. Tenga X los valores posibles $1, 2, \ldots, n, \ldots$ y supóngase que $P(X = n) = \frac{1}{2}^n$. Digamos

$$\begin{aligned} Y &= 1 \quad \text{si} \quad X \text{ es par,} \\ &= -1 \quad \text{si} \quad X \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Entonces, Y toma los dos valores -1 y $+1$. Puesto que $Y = 1$ si y sólo si $X = 2$, o $X = 4$, o $X = 6$, o ... , aplicando la ecuación (5.2) se tiene

$$P(Y = 1) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64} + \cdots = \tfrac{1}{3}.$$

Por lo tanto,

$$P(Y = -1) = 1 - P(Y = 1) = \tfrac{2}{3}.$$

Caso 2. X es una variable aleatoria continua. Puede suceder que X sea una variable aleatoria continua, mientras que Y sea discreta. Por ejemplo, supongamos que X puede tomar todos los valores reales, mientras que se define que Y sea $+1$ si $X \geq 0$ y que $Y = -1$ si $X < 0$. Para obtener la distribución de probabilidades de Y, determinemos simplemente el evento equivalente (en el recorrido R_X) que corresponde a los diferentes valores de Y. En el caso anterior, $Y = 1$ si y sólo si $X \geq 0$, mientras que $Y = -1$ si y sólo si $X < 0$. Por lo tanto, $P(Y = 1) = P(X \geq 0)$, mientras que P(Y = − 1) = P(X < 0). Si se conoce la fdp de X pueden calcularse estas probabilidades. En el caso general, si $\{Y = y_i\}$ es equivalente a un evento, digamos A, en el recorrido de X entonces,

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = \int_A f(x)dx.$$

5.4 Variables aleatorias continuas

El caso más importante (y el que se encuentra con mayor frecuencia) aparece cuando X es una variable aleatoria continua con fdp f y H es una función continua. Por tanto, $Y = H(X)$ es una variable aleatoria continua y nuestro propósito será obtener su fdp, digamos g.

El *procedimiento general* será así:

a) Obtenga G, la fda de Y, donde $G(y) = P(Y \leq y)$, después de encontrar el evento A (en el recorrido de X) que equivale al evento $\{Y \leq y\}$.

b) Diferencie $G(y)$ respecto a y para obtener $g(y)$.

c) Determine estos valores de y en el recorrido de Y para los cuales $g(y) > 0$.

EJEMPLO 5.6. Supóngase que X tiene fdp

$$f(x) = 2x, \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad \text{en otra parte.}$$

Sea $H(x) = 3x + 1$. Por tanto, para encontrar la fdp de $Y = H(X)$ tenemos (Fig. 5.5)

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y)$$
$$= P(X \leq (y-1)/3)$$
$$= \int_0^{(y-1)/3} 2x\,dx = [(y-1)/3]^2.$$

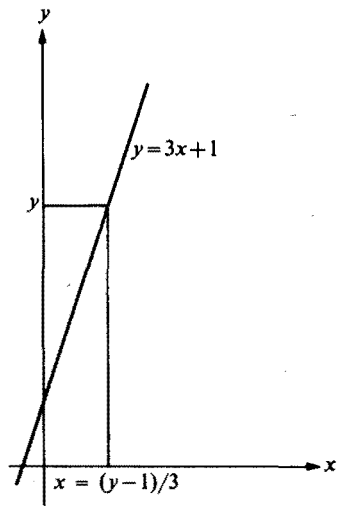


FIGURA 5.5

Así,

$$g(y) = G'(y) = \tfrac{2}{9}(y-1).$$

Puesto que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1 < y < 4$.

Observación: El evento A, antes mencionado, que equivale al evento $\{Y \leq y\}$, es simplemente $\{X \leq (y-1)/3\}$.

Existe otro método algo diferente para obtener el mismo resultado y que más adelante será útil. Consideremos nuevamente

$$G(y) = P(Y \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-1}{3}\right) = F\left(\frac{y-1}{3}\right),$$

donde F es la fda de X, esto es,

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Para evaluar la derivada de G, $G'(y)$, usamos la regla de la cadena para la derivación como sigue:

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{du} \cdot \frac{du}{dy}, \quad \text{donde } u = \frac{y-1}{3},$$

por tanto,

$$G'(y) = F'(u)\cdot\frac{1}{3} = f(u)\cdot\frac{1}{3} = 2\left(\frac{y-1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3},$$

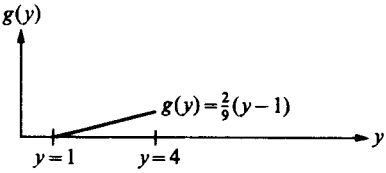


FIGURA 5.6

como antes. En la figura 5.6 aparece la gráfica de la fdp de Y. (Para verificar los cálculos nótese que $\int_1^4 g(y)dy = 1$.)

EJEMPLO 5.7. Supóngase que una variable aleatoria continua tiene fdp como en el ejemplo 5.6. Sea $H(x) = e^{-x}$. Para encontrar la fdp de $Y = H(X)$ procedemos como sigue (Fig. 5.7):

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(e^{-x} \leq y) \\ &= P(X \geq -\ln y) = \int_{-\ln y}^{1} 2x\,dx \\ &= 1 - (-\ln y)^2. \end{aligned}$$

Por tanto, $g(y) = G'(y) = -2\ln y/y$. Puesto que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, encontramos que $g(y) > 0$ para $1/e < y < 1$. (Nótese que el signo algebraico para $g(y)$ es correcto, puesto que $\ln y < 0$ para $1/e < y < 1$.) La gráfica de $g(y)$ se ilustra en la figura 5.8.

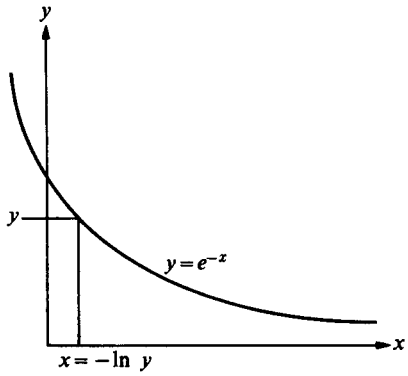


FIGURA 5.7

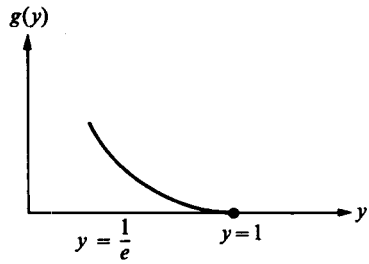


FIGURA 5.8

Otra vez podemos obtener el resultado anterior con un planteamiento algo diferente que esbozaremos brevemente. Como antes,

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X \geq -\ln y) \\ &= 1 - P(X \leq -\ln y) = 1 - F(-\ln y), \end{aligned}$$

donde, como antes, F es la fda de X. A fin de obtener la derivada de G usaremos otra vez la regla de la cadena como sigue:

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG}{du}\frac{du}{dy}, \quad \text{donde} \quad u = -\ln y.$$

Así,

$$G'(y) = -F'(u)\left(-\frac{1}{y}\right) = +2\ln y \cdot \left(-\frac{1}{y}\right),$$

como antes.

Generalicemos ahora el planteamiento que sugieren los ejemplos anteriores. El paso crucial en cada uno de los ejemplos se efectuó al sustituir el evento $\{Y \leq y\}$ por el evento equivalente en términos de la variable aleatoria X. En los problemas anteriores esto fue relativamente sencillo, puesto que en cada uno de los casos la función fue una función de X estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

En la figura 5.9, y es una función estrictamente creciente de x. Por lo tanto, podemos resolver $y = H(x)$ para x en términos de y, digamos $x = H^{-1}(y)$, donde H^{-1} se llama función inversa de H. Así, si H es estrictamente creciente, $\{H(X) \leq y\}$ equivale a $\{X \leq H^{-1}(y)\}$, mientras que si H es estrictamente decreciente, $\{H(X) \leq y\}$ equivale a $\{X \geq H^{-1}(y)\}$.

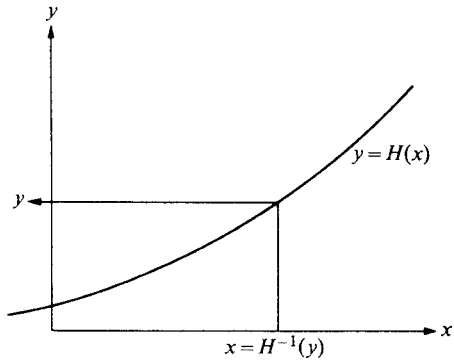


FIGURA 5.9

El método empleado en los ejemplos anteriores ahora se puede generalizar como sigue.

Teorema 5.1. Sea X una variable aleatoria continua con fdp f, donde $f(x) > 0$ para $a < x < b$. Supóngase que $y = H(x)$ sea una función de x estrictamente monótona (creciente o decreciente). Supóngase que esta función es derivable (y, por tanto, continua) para toda x. Entonces, la variable aleatoria Y definida como $Y = H(X)$ tiene una fdp g dada por

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \tag{5.3}$$

donde x se expresa en términos de y. Si H es creciente, entonces g es distinta de cero para los valores de y que satisfacen $H(a) < y < H(b)$. Si H es decreciente, entonces g es distinta de cero para los valores de y que satisfacen $H(b) < y < H(a)$.

Demostración: a) Supongamos que H es una función estrictamente creciente. Por tanto,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y)$$
$$= P(X \leq H^{-1}(y)) = F(H^{-1}(y)).$$

Diferenciando $G(y)$ respecto a y, obtenemos, al usar la regla de la cadena para las derivadas,

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{dx}\frac{dx}{dy}, \quad \text{donde} \quad x = H^{-1}(y).$$

Así

$$G'(y) = \frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dy} = f(x)\frac{dx}{dy}.$$

b) Supongamos que H es una función decreciente. Por lo tanto,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(H(X) \leq y) = P(X \geq H^{-1}(y))$$
$$= 1 - P(X \leq H^{-1}(y)) = 1 - F(H^{-1}(y)).$$

Procediendo como antes, podemos escribir

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{dG(y)}{dx}\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}[1 - F(x)]\frac{dx}{dy} = -f(x)\frac{dx}{dy}.$$

Observación: El signo algebraico obtenido en *b*) es correcto, puesto que si y es una función decreciente de x, x es una función decreciente de y y, por lo tanto, $dx/dy < 0$. Así, al usar el símbolo del valor absoluto en torno a dx/dy, podemos combinar el resultado de *a*) y *b*) y obtener la forma final del teorema. •

EJEMPLO 5.8. Reconsideremos los ejemplos 5.6 y 5.7 aplicando el teorema 5.1

a) En el ejemplo 5.6 teníamos $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$ y $y = 3x + 1$. Por lo tanto, $x = (y-1)/3$ y $dx/dy = \frac{1}{3}$. Así, $g(y) = 2[(y-1)/3]\frac{1}{3} = \frac{2}{9}(y-1)$, $1 < y < 4$, lo que concuerda con el resultado obtenido previamente.

b) En el ejemplo 5.7 teníamos $f(x) = 2x$, $0 < x < 1$ y $y = e^{-x}$. Por tanto, $x = -\ln y$ y $dx/dy = -1/y$. Así, $g(y) = -2(\ln y)/y$, $1/e < y < 1$, lo que de nuevo está de acuerdo con el resultado anterior.

Si $y = H(x)$ no es una función monótona de x no podemos aplicar directamente el método anterior. En su lugar, volveremos al método general antes bosquejado. El ejemplo siguiente ilustra este procedimiento.

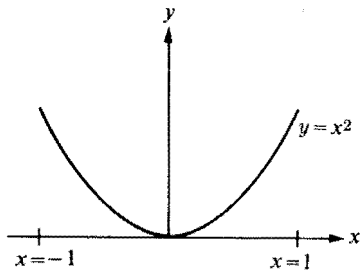


FIGURA 5.10

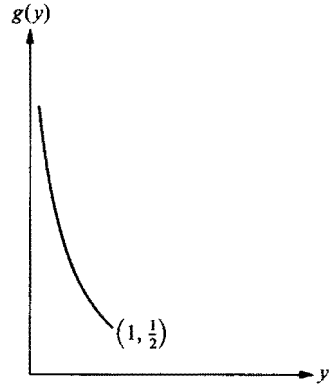


FIGURA 5.11

EJEMPLO 5.9. Supongamos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}, \qquad -1 < x < 1, \\ &= 0 \qquad \text{para cualquier otro valor.} \end{aligned}$$

Sea $H(x) = x^2$. Obviamente ésta *no* es una función monótona en todo el intervalo $[-1, 1]$ (Fig. 5.10). Por lo tanto, obtenemos la fdp de $Y = X^2$ como sigue:

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}), \end{aligned}$$

En donde F es la fda de la variable aleatoria X. Por tanto,

$$\begin{aligned} g(y) &= G'(y) = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} - \frac{f(-\sqrt{y})}{-2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})]. \end{aligned}$$

Así, $g(y) = (1/2\sqrt{y})(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 1/2\sqrt{y}$, $0 < y < 1$.(Véase la Fig. 5.11.)

El método usado en el ejemplo anterior da el siguiente resultado general.

Teorema 5.2. Sean X una variable aleatoria continua con fdp f y $Y = X^2$. Entonces, la variable aleatoria Y tiene fdp dada por

$$g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})].$$

Demostración: Véase el ejemplo 5.9.

PROBLEMAS

5.1. Supóngase que X está distribuida uniformemente en $(-1, 1)$. Sea $Y = 4 - X^2$. Encontrar la fdp de Y, sea $g(y)$, y dibujarla. También verificar que $g(y)$ es una fdp.

5.2. Supóngase que X está distribuida uniformemente en (1,3). Obtener las fdp de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = 3X + 4$ *b)* $Z = e^X$.

Verificar en cada uno de los casos que la función obtenida es una fdp y dibujarla.

5.3. Supóngase que la variable aleatoria continúa X tiene fdp $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Encontrar las fdp de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = X^3$ *b)* $Z = 3/(X + 1)^2$.

5.4. Supóngase que la variable aleatoria discreta X toma los valores 1,2 y 3 con igual probabilidad. Encontrar la distribución de probabilidades de $Y = 2X + 3$.

5.5. Supóngase que X está distribuida uniformemente en el intervalo (0,1). Encontrar la fdp de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = X^2 + 1$ *b)* $Z = 1/(X + 1)$.

5.6. Supóngase que X está distribuida uniformemente en $(-1, 1)$. Encontrar la fdp de las siguientes variables aleatorias:

a) $Y = \text{sen}(\pi/2)X$ *b)* $Z = \cos(\pi/2)X$ *c)* $W = |X|$.

5.7. Supóngase que el radio de una esferas es una variable aleatoria continua. (Debido a la imprecisión en el proceso de fabricación, los radios de las diversas esferas pueden ser diferentes.) Supóngase que el radio R tiene fdp $f(r) = 6r(1 - r)$, $0 < r < 1$. Encontrar la fdp del volumen V y del área superficial S de la esfera.

5.8. Una corriente eléctrica I que fluctúa se puede considerar como una variable aleatoria distribuida uniformemente en todo el intervalo (9, 11.). Si

esta corriente pasa por una resistencia de 2 ohms, encontrar la fdp de la potencia $P = 2I^2$.

5.9. La velocidad de una molécula en un gas uniforme en equilibrio es una variable aleatoria V cuya fdp está dada por

$$f(v) = av^2e^{-bv^2}, \quad v > 0,$$

En donde $b = m/2kT$ y k, T y m denotan la constante de Boltzman, la temperatura absoluta y la masa de la molécula, respectivamente.

a) Calcular la constante a (en términos de b). [*Indicación:* Usar el hecho de que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi/2}$ e integrar por partes.]

b) Derivar la distribución de la variable aleatoria $W = mV^2/2$ que representa la energía cinética de la molécula.

5.10. Un voltaje aleatorio X está distribuido uniformemente en el intervalo $(-k, k)$. Si X es la energía recibida en un dispositivo no lineal, con las características que se indican en la figura 5.12, encontrar la distribución de probabilidades de Y en los tres casos siguientes:

a) $k < a$ *b*) $a < k < x_0$ *c*) $k > x_0$.

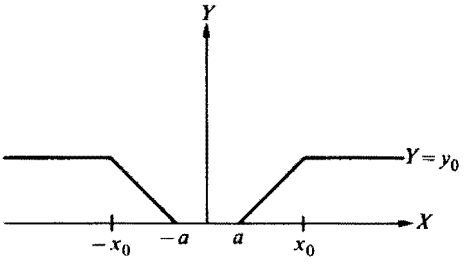


FIGURA 5.12

Observación: La distribución de probabilidades de Y es un ejemplo de distribución *mixta*. Y toma el valor 0 con una probabilidad *positiva* y también toma todos los valores en ciertos intervalos. (Véase la Sec. 4.6.)

5.11. La energía radiante (en Btu/hr/pie²) está dada como la siguiente función de la temperatura T (en grados fahrenheit): $E = 0.173(T/100)^4$. Supóngase que la temperatura T se considera como una variable aleatoria continua con fdp

$$f(t) = 200t^{-2}, \quad 40 \leq t \leq 50,$$
$$= 0 \qquad \text{para cualquier otro valor.}$$

Encontrar la fdp de la energía radiante E.

5.12. Para medir las velocidades del aire se usa un tubo (conocido como el tubo estático de Pitot) que permite medir la diferencia de presión. Esta diferencia de presión está dada por $P = (1/2)dV^2$, donde d es la densidad del aire y V es la velocidad del viento (kph). Si V es una variable aleatoria distribuida uniformemente en (10, 20), encontrar la fdp de P.

5.13. Supóngase que $P(X \leq 0.29) = 0.75$, donde X es una variable aleatoria continua con alguna distribución definida en (0,1). Si $Y = 1 - X$, determinar k, de modo que $P(Y \leq k) = 0.25$.

6

Variables aleatorias bidimensionales y de mayor dimensión

6.1 Variables aleatorias bidimensionales

En nuestro estudio de las variables aleatorias hemos considerado, hasta aquí, sólo el caso unidimensional. Es decir, el resultado del experimento se podía registrar como un solo número x.

En muchos casos, sin embargo, nos interesa observar simultáneamente dos o más características numéricas. Por ejemplo, la dureza H y la resistencia a la tensión T de una pieza manufacturada de acero pueden ser de interés y consideraríamos (h, t) como un solo resultado experimental. Podríamos estudiar la altura A y el peso P de una persona determinada, que daría lugar al resultado (p, a). Finalmente, podríamos observar la cantidad de lluvia total, LL, y el promedio de temperatura, T, en cierta región durante un mes específico, que daría lugar al resultado (ll, t).

Haremos la siguiente definición formal.

Definición. Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado con ε. Sean $X = X(s)$ y $Y = Y(s)$ dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in S$ (Fig.6.1).

Llamamos a (X, Y) *variable aleatoria bidimensional* (que también se denomina vector aleatorio).

Si $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s), \ldots, X_n = Xn(s)$ son n funciones, cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado $s \in S$, entonces llamamos a $(X_1, \ldots, Xn)$ una *variable aleatoria n-dimensional* (o un vector aleatorio n-dimensional).

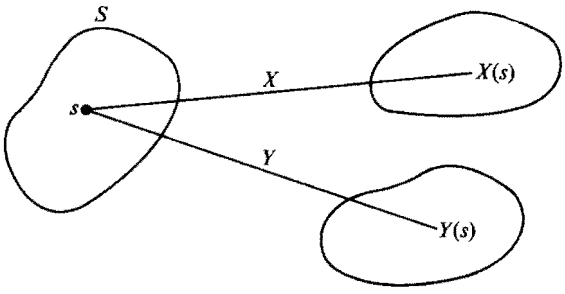


FIGURA 6.1

Observación: Como en el caso unidimensional, no nos interesa la naturaleza funcional de $X(s)$ y $Y(s)$, sino los valores que toman X y Y. Hablaremos nuevamente del *recorrido* de (X, Y), digamos R_{XxY}, como el conjunto de todos los valores posibles de (X, Y). En el caso bidimensional, por ejemplo, el recorrido de (X, Y) será un subconjunto del plano euclidiano. Cada uno de los resultados $X(s)$, $Y(s)$ se puede representar como un punto (x, y) en el plano. Suprimiremos nuevamente la naturaleza funcional de X y Y al escribir, por ejemplo, $P[X \leq a, Y \leq b]$, en vez de $P[X(s) \leq a, Y(s) \leq b]$.

Como en el caso unidimensional, distinguiremos entre dos tipos básicos de variables aleatorias: las variables aleatorias discretas y las continuas.

Definición. (X, Y) es una variable aleatoria *bidimensional discreta* si los valores posibles de (X, Y) son finitos o infinitos numerables. Es decir, los valores posibles de (X, Y) se pueden representar como $(x_i, y_j), i = 1, 2, \ldots, n, \ldots; j = 1, 2, \ldots, m, \ldots$

(X, Y) es una variable aleatoria *bidimensional continua* si (X, Y) puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano. [Por ejemplo, si (X, Y) toma todos los valores en el rectángulo $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ o todos los valores en el círculo $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, diríamos que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua.]

Observaciones: a) En otras palabras, (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional si representa el resultado de un experimento aleatorio en el cual hemos medido las *dos* características numéricas X y Y.

b) Puede suceder que uno de los componentes de (X, Y), digamos X, sea discreto, mientras que el otro es continuo. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones nos interesamos sólo por los casos analizados anteriormente, en los cuales ambos componentes son discretos, o ambos continuos.

c) En muchas situaciones las dos variables aleatorias X y Y, consideradas en conjunto, son de un modo muy natural el resultado de un solo experimento, como se ilustró en los ejemplos anteriores. Es así como X y Y pueden representar la altura y el peso de un mismo individuo, etc. Sin embargo, no es necesario que exista esta clase de conexión. Por ejemplo, X podría ser la corriente que circula por un circuito en un momento específico, mientras que Y podría ser la temperatura en la habitación en ese instante, entonces podríamos considerar la variable aleatoria bidimensional (X, Y). En la mayor parte de las aplicaciones hay una razón importante para considerar X y Y conjuntamente.

Para describir la distribución de probabilidades de (X, Y) procedemos de modo análogo al caso unidimensional.

Definición. *a*) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Con cada resultado posible (x_i, y_j) asociamos un número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X = x_i, Y = y_j)$ y que satisface las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} &1) \quad p(x_i, y_j) \geq 0 \quad \text{para toda } (x_i, y_j) \\ &2) \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, x_j) = 1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

La función p definida para toda (x_i, y_j) en el recorrido de (X, Y) se llama *función de probabilidad* de (X, Y). El conjunto de ternas $(x_i, y_j, p(x_i, y_j))$, $i, j = 1, 2, \ldots$, en algunos casos se denomina *distribución de probabilidades* de (X, Y).

b) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua que toma todos los valores en una región R del plano euclidiano. La *función de densidad de probabilidades conjuntas* f es una función que satisface las siguientes condiciones:

$$3) \quad f(x,y) \geq 0 \quad \text{para toda} \quad (x,y) \in R,$$

$$4) \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 1. \tag{6.2}$$

Observaciones: a) La analogía a una distribución de masas es otra vez indudable. Tenemos una masa unitaria distribuida en una región del plano. En el caso discreto, toda la masa se concentra en un número finito o infinito numerable de puntos con masa $p(x_i, y_j)$ ubicados en (x_i, y_j). En el caso continuo, la masa se encuentra en todos los puntos de un conjunto no numerable en el plano.

b) La condición 4 indica que el *volumen* total bajo la superficie dada por la ecuación $z = f(x,y)$es igual a 1.

c) Como en el caso unidimensional, $f(x,y)$ no representa la probabilidad de nada. Sin embargo, para Δx y Δy positivos y suficientemente pequeñas, $f(x,y)\Delta x \Delta y$ es aproximadamente igual a $P(x \leq X \leq x+\Delta x, y \leq Y \leq y+\Delta y)$.

d) Como en el caso unidimensional, adoptaremos la convención de que $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \notin R$. Por tanto, podemos considerar f definida para toda (x,y) en el plano y la condición 4 anterior se convierte en $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

e) Nuevamente *suprimiremos* la naturaleza funcional de la variable aleatoria bidimensional (X,Y). *Deberíamos* escribir proposiciones de la forma $P[X(s) = x_i,\ Y(s) = y_j]$, etc. No obstante, si se entiende nuestra notación abreviada, no debe surgir ninguna dificultad.

f) De nuevo, como en el caso unidimensional, la distribución de probabilidades de (X,Y) está realmente inducida por la probabilidad de eventos asociados con el espacio muestral original S. Sin embargo, principalmente nos interesaremos por los valores de (X,Y) y, por tanto, relacionados en forma directa con el recorrido de (X,Y). No obstante, el lector no debe perder de vista el hecho de que si $P(A)$ está especificada para todos los eventos $A \subset S$, entonces está determinada la probabilidad asociada con eventos en el recorrido de (X,Y). Es decir, si B está en el recorrido de (X,Y), tenemos

$$P(B) = P[(X(s), Y(s)) \in B] = P[s \mid (X(s), Y(s)) \in B].$$

Esta última probabilidad se refiere a un evento en S y, por tanto, *determina* la probabilidad de B. En nuestra terminología previa, B y $\{s \mid (X(s), Y(s)) \in B\}$ son eventos *equivalentes* (Fig. 6.2).

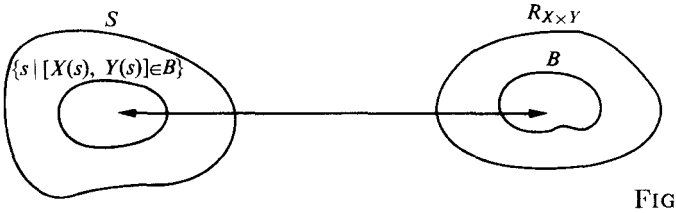


FIGURA 6.2

Si B está en el recorrido de (X, Y) tenemos

$$P(B) = \sum_B \sum p(x_i, y_j), \tag{6.3}$$

si (X, Y) es discreta, la suma se toma con todos los índices (i, j) para los cuales $(x_i, y_j) \in B$. Y

$$P(B) = \iint_B f(x, y)\, dx\, dy, \tag{6.4}$$

si (X, Y) es continua.

EJEMPLO 6.1. Dos líneas de producción fabrican cierto tipo de artículo. Supóngase que la capacidad (en cualquier día dado) es de 5 artículos para la línea I y de 3 artículos para la línea II, y que el número verdadero de artículos producidos por cada una de las líneas es una variable aleatoria. Sea (X, Y) la representación de la variable aleatoria bidimensional que da el número de artículos producidos por la línea I y por la línea II, respectivamente.

TABLA 6.1

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

La tabla 6.1 muestra la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y). Cada dato representa

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Así, $p(2, 3) = P(X = 2, Y = 3) = 0.04$, etc. Por lo tanto, si B está definida como

$B = \{$Más artículos producidos por la línea I que por la línea II$\}$

encontramos que

$$P(B) = 0.01 + 0.03 + 0.05 + 0.07 + 0.09 + 0.04 + 0.05 + 0.06 + 0.08 + 0.05 + 0.05 + 0.06 + 0.06 + 0.05 = 0.75.$$

EJEMPLO 6.2. Supóngase que un fabricante de bombillas está interesado en el número de éstas que le han sido pedidas durante los meses de enero y febrero. X y Y indican el número de bombillas ordenadas durante esos dos meses, respectivamente. Supondremos que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional con la siguiente fdp conjunta (véase la Fig. 6.3):

$$f(x,y) = c \quad \text{si} \quad 5000 \leq x \leq 10000 \quad \text{y} \quad 4000 \leq y \leq 9000,$$
$$= 0 \quad \text{en otro caso.}$$

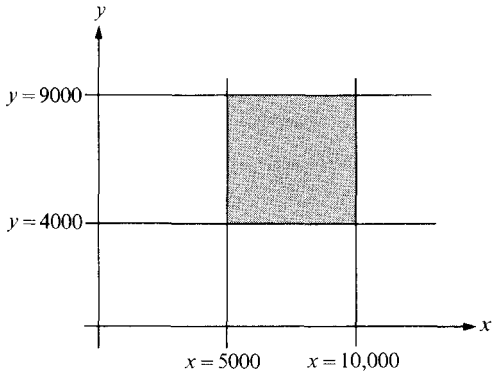


FIGURA 6.3

Para determinar c usamos el hecho de que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{4000}^{9000} \int_{5000}^{10000} f(x,y)\, dx\, dy = c[5000]^2.$$

Así, $c = (5000)^{-2}$. Por tanto, si $B = \{X \geq Y\}$, tenemos

$$P(B) = 1 - \frac{1}{(5000)^2} \int_{5000}^{9000} \int_{5000}^{y} dx\, dy$$
$$= 1 - \frac{1}{(5000)^2} \int_{5000}^{9000} [y - 5000] dy = \frac{17}{25}.$$

Observación: En el ejemplo anterior, X y Y obviamente deben ser números enteros, pues ¡no podemos ordenar un número fraccionario de bombillas! Sin embargo, nuevamente tratamos con una situación idealizada en la cual permitimos que X tome *todos* los valores entre 5000 y 10 000 (inclusive).

EJEMPLO 6.3. Supóngase que la variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) tiene una fdp conjunta dada por

$$f(x, y) = x^2 + \frac{xy}{3}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro punto.}$$

Para verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx\, dy$$
$$= \int_0^2 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 y}{6}\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right) dy = \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{12}\Big|_0^2$$
$$= \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{12} = 1$$

Sea $B = \{X + Y \ge 1\}$. (Véase la Fig.6.4.) Calcularemos $P(B)$ al evaluar $1 - P(B^c)$, donde $B^c = \{X + Y < 1\}$. Por lo tanto,

$$P(B) = 1 - \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy\, dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left[x^2(1-x) + \frac{x(1-x)^2}{6}\right] dx$$

$$= 1 - \tfrac{7}{72} = \tfrac{65}{72}.$$

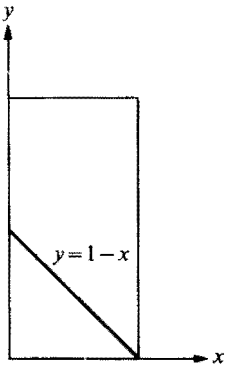


FIGURA 6.4

Al estudiar variables aleatorias unidimensionales encontramos que F, la función de distribución acumulativa, tenía un papel importante. En el caso bidimensional, otra vez podemos definir una función acumulativa como se indica a continuación.

Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. La *función de distribución acumulativa* (fda) F de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está definida por

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Observación: F es una función de *dos* variables y tiene un número de propiedades análogas a las estudiadas para la fda unidimensional. (Véase la Sec. 4.5.) Mencionaremos sólo la siguiente propiedad importante.

Si F es fda de una variable aleatoria bidimensional con fdp conjunta f, entonces

$$\partial^2 F(x, y)/\partial x \partial y = f(x, y)$$

dondequiera que F sea diferenciable. Este resultado es análogo al del teorema 4.4 en el cual probamos que $(d/dx)F(x) = f(x)$, donde f es la fdp de una variable aleatoria unidimensional X.

6.2 Distribuciones de probabilidades marginales y condicionales

Con cada variable aleatoria bidimensional (X, Y) asociamos dos variables aleatorias unidimensionales llamadas X y Y, respectivamente. Es decir, podemos interesarnos por la distribución de probabilidades de X o por la distribución de probabilidades de Y.

EJEMPLO 6.4. Consideremos otra vez el ejemplo 6.1. Además de los datos de la tabla 6.1, calculemos también los totales "marginales", esto es, la suma de las 6 columnas y 4 filas de la tabla. (Véase la tabla 6.2.)

TABLA 6.2

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Suma
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.25
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08	0.26
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06	0.25
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05	0.24
Suma	0.03	0.08	0.16	0.21	0.24	0.28	1.00

Las probabilidades que aparecen en los márgenes de las filas y columnas representan la distribución de probabilidades de Y y X, respectivamente. Por ejemplo, $P(Y = 1) = 0.26$, $P(X = 3) = 0.21$, etc. Debido a la forma de la tabla 6.2, nos referimos generalmente a la distribución *marginal* de X o a la distribución *marginal* de Y, cada vez que tenemos una variable aleatoria bidimensional (X, Y), ya sea discreta o continua.

En el caso *discreto* procedemos así: puesto que $X = x_i$ debe ocurrir con $Y = y_j$ para una j, y puede ocurrir con $Y = y_j$ para sólo una j, tenemos:

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P(X = x_i, Y = y_1 \text{ o } X = x_i, Y = y_2 \text{ o } \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j).$$

La función p definida para $x_1, x_2, \ldots$, representa la *distribución marginal de probabilidades* de X. Análogamente definimos $q(y_j) = P(Y = Y_j) = \Sigma_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$ como la *distribución marginal de probabilidades* de Y.

En el caso *continuo* procedemos como sigue: sea f la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional continua (X, Y). Definimos g y h, las *funciones densidad de probabilidades marginales* de X y Y, respectivamente, como sigue:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy; \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx.$$

Estas fdp corresponden a las fdp básicas de las variables aleatorias unidimensionales X y Y, respectivamente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(c \leq X \leq d) &= P[c \leq X \leq d, -\infty < Y < \infty] \\ &= \int_c^d \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy\, dx \\ &= \int_c^d g(x)\, dx. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6.5. El empuje X y la razón de la mezcla Y son dos características del funcionamiento de un motor a reacción. Supóngase que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua con fdp conjunta:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2(x+y-2xy), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ &= 0 \quad \text{en otro caso.} \end{aligned}$$

(Las unidades se han ajustado para usar valores entre 0 y 1.) La fdp marginal de X está dada por

$$\begin{aligned} g(x) = \int_0^1 2(x+y-2xy)\, dy &= 2(xy + y^2/2 - xy^2)\,|_0^1 \\ &= 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Es decir X está distribuida uniformemente en $[0,1]$. La fdp marginal de Y está dada por

$$\begin{aligned} h(y) = \int_0^1 2(x+y-2xy)\, dx &= 2(x^2/2 + xy - x^2y)\,|_0^1 \\ &= 1, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y también está distribuida uniformemente en $[0,1]$.

Definición. Decimos que una variable aleatoria bidimensional continua está *distribuida uniformemente* en una región R en un plano euclidiano, si

$$f(x,y) = \text{const.} \quad \text{para } (x,y) \in R,$$
$$= 0 \quad \text{para todo otro punto.}$$

Debido a la condición $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$, lo anterior implica que la constante es igual a 1/área (R). Suponemos que R es una región con área finita distinta de cero.

Observación: Esta definición representa el término bidimensional análogo a la variable aleatoria unidimensional distribuida uniformemente.

EJEMPLO 6.6. Supóngase que la variable aleatoria bidimensional (X,Y) está *distribuida uniformemente* en la región sombreada R que se indica en la figura 6.5. Por tanto,

$$f(x,y) = \frac{1}{\text{área}(R)}, \quad (x,y) \in R.$$

Encontramos que

$$\text{área } (R) = \int_0^1 (x - x^2)dx = \tfrac{1}{6}.$$

Luego, la fdp está dada por

$$f(x,y) = 6, \quad (x,y) \in R$$
$$= 0, \quad (x,y) \notin R.$$

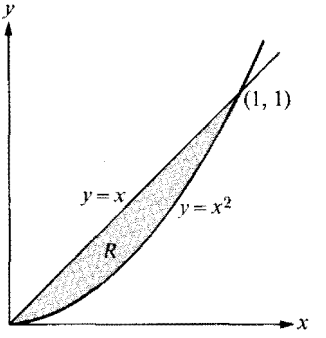


FIGURA 6.5

En las ecuaciones siguientes encontramos las fdp marginales de X y Y.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{x^2}^{x} 6\,dy$$
$$= 6(x - x^2), \quad 0 \le x \le 1;$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{y}^{\sqrt{y}} 6\,dx$$
$$= 6(\sqrt{y} - y), \quad 0 \le y \le 1.$$

Las gráficas de estas fdp aparecen en la figura 6.6.

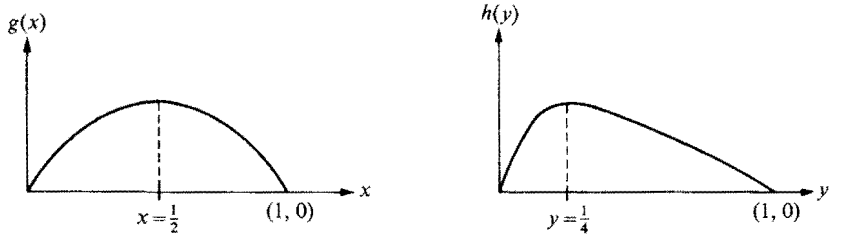


FIGURA 6.6

El concepto de probabilidad condicional se puede presentar de una manera muy natural.

EJEMPLO 6.7. Consideremos otra vez los ejemplos 6.1 y 6.4. Supóngase que queremos evaluar la probabilidad condicional $P(X = 2 \mid Y = 2)$. De acuerdo con la definición de probabilidad condicional tenemos

$$P(X = 2 \mid Y = 2) = \frac{P(X = 2, Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{0.05}{0.25} = 0.20.$$

Podemos efectuar tal cálculo en forma bastante general para el caso discreto. Tenemos

$$\begin{aligned} P(x_i \mid y_j) &= P(X = x_i \mid Y = y_j) \\ &= \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)} \quad \text{si} \quad q(y_j) > 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} q(y_j \mid x_i) &= P(Y = y_j \mid X = x_i) \\ &= \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} \quad \text{si} \quad p(x_i) > 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Observación: Para una j dada, $p(x_i \mid y_j)$ satisface todas las condiciones de una distribución de probabilidades. Tenemos $p(x_i \mid y_j) \geq 0$ y también

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i \mid y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)} = \frac{q(y_j)}{q(y_j)} = 1.$$

En el *caso continuo*, la formulación de la probabilidad condicional presenta alguna dificultad, puesto que para cualesquiera x_0 y y_0 dadas, tenemos $P(X = x_0) = P(Y = y_0) = 0$. Enunciemos las siguientes definiciones formales.

Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con fdp conjunta f. Sean g y h las fdp marginales de X y Y, respectivamente.

La fdp *condicional* de X para $Y = y$ dada, está definida por

$$g(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}, \quad h(y) > 0. \tag{6.7}$$

La fdp *condicional* de Y para una $X = x$ dada se define

$$h(y \mid x) \frac{f(x, y)}{g(x)}, \quad g(x) > 0. \tag{6.8}$$

Observaciones: a) Las fdp condicionales anteriores satisfacen todas las exigencias de una fdp unidimensional. Así, para *y fija*, tenemos $g(x \mid y) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x \mid y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{h(y)} dx = \frac{1}{h(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \frac{h(y)}{h(y)} = 1.$$

Un cálculo análogo se puede hacer para $h(y \mid x)$. Por tanto, las ecuaciones (6.7) y (6.8) *definen* las fdp en R_x y R_y, respectivamente.

b) Una interpretación intuitiva de $g(x \mid y)$ se obtiene si consideramos que la superficie representada por la fdp conjunta f es cortada, digamos, por el plano $y = c$. La intersección del plano con la superficie $z = f(x, y)$ resultará en una fdp unidimensional llamada la fdp de X para $Y = c$. Ésta será precisamente $g(x \mid c)$.

c) Supongamos que (X, Y) representan la altura y el peso de una persona, respectivamente. Sea f la fdp conjunta de (X, Y) y sea g la fdp marginal de X (sin tomar en cuenta Y). Por tanto, $\int_{5.8}^{6} g(x)\, dx$ representaría la probabilidad del evento $\{5.8 \leq X \leq 6\}$ sin tomar en cuenta el peso Y. Por su parte $\int_{5,8}^{6} g(x \mid 150)\, dx$ se interpretaría como $P(5.8 \leq X \leq 6 \mid Y = 150)$. Estrictamente hablando, esta probabilidad condicional no está definida en los términos de nuestra convención previa con la probabilidad condicional, puesto que $P(Y = 150) = 0$. Sin embargo, sólo usamos la integral anterior para *definir* esta probabilidad. Sobre una base intuitiva, ciertamente, éste debe ser el significado de dicho número.

EJEMPLO 6.8. Refiriéndonos al ejemplo 6.3, tenemos

$$g(x) = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x,$$

$$h(y) = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{xy}{3}\right) dx = \frac{y}{6} + \frac{1}{3}.$$

Por tanto,

$$g(x \mid y) = \frac{x^2 + xy/3}{1/3 + y/6} = \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2;$$

$$h(y \mid x) = \frac{x^2 + xy/3}{2x^2 + 2/3(x)} = \frac{3x^2 + xy}{6x^2 + 2x} = \frac{3x + y}{6x + 2}, \quad 0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 1.$$

Para verificar que $g(x \mid y)$ es una fdp, tenemos

$$\int_0^1 \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}\, dx = \frac{2 + y}{2 + y} = 1 \quad \text{para toda } y.$$

Un cálculo semejante se puede hacer para $h(y \mid x)$.

6.3 Variables aleatorias independientes

Tal como definimos el concepto de independencia entre dos eventos A y B, ahora definiremos las *variables aleatorias independientes*. Lo que queremos decir intuitivamente es que X y Y son variables aleatorias independientes si el resultado de X, digamos, de ninguna manera influye en el resultado de Y. Ésta es una noción extremadamente importante y hay muchas situaciones en que dicha suposición se justifica.

EJEMPLO 6.9. Consideremos dos fuentes de material radiactivo, situadas a cierta distancia una de otra, que emiten partículas α. Supongamos que ambas se observan durante un periodo de dos horas y se anota el número de partículas emitidas. Supóngase que las siguientes variables aleatorias son de interés: X_1 y X_2, el número de partículas emitidas por la primera fuente durante la primera y la segunda hora, respectivamente; Y_1 y Y_2, el número de partículas emitidas por la segunda fuente durante la primera y la segunda hora, respectivamente. Parece obvio

por intuición que (X_1 y Y_1), o (X_1 y Y_2), o (X_2 y Y_1), o (X_2 y Y_2) son todas pares de variables aleatorias independientes. Las X dependen sólo de las características de la fuente 1, mientras que las Y dependen de las características de la fuente 2 y posiblemente no hay razón para suponer que una fuente influya de manera alguna en el comportamiento de la otra. Cuando consideramos la posible independencia de X_1 y X_2, el asunto no es tan claro. ¿El número de partículas emitidas durante la segunda hora está influido por el número emitido durante la primera hora? Para responder a este interrogante tendríamos que obtener información adicional acerca del mecanismo de emisión. Ciertamente no podríamos suponer *a priori* que X_1 y X_2 son independientes.

Hagamos ahora más precisa la anterior noción intuitiva de independencia.

Definición. *a*) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Decimos que X y Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $p(x_i,y_j) = p(x_i)q(y_j)$ para toda i y j. Esto es, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, para toda i y j.

b) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Decimos que X y Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $f(x,y) = g(x)h(y)$ para toda (x,y), donde f es la fdp conjunta, y g y h son las fdp marginales de X y Y, respectivamente.

Observación: Si comparamos la definición anterior con la que se proporcionó para *eventos* independientes, la semejanza es aparente: esencialmente necesitamos que la probabilidad conjunta (o fdp conjunta) pueda factorizarse. El teorema siguiente indica que la definición anterior es equivalente a otro planteamiento que podríamos haber hecho.

Teorema 6.1. *a*) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Entonces X y Y son independientes si y sólo si $p(x_i \mid y_j) = p(x_i)$ para toda i y j (o lo que es equivalente, si y sólo si $q(y_j \mid x_i) = q(y_j)$ para toda i y j).

b) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Entonces X y Y son independientes si y sólo si $g(x \mid y) = g(x)$, o lo que es equivalente, si y sólo si $h(y \mid x) = h(y)$ para toda (x,y).

Demostración: Véase el problema 6.10.

EJEMPLO 6.10. Supongamos que una máquina se usa para un trabajo específico en la mañana y para otro diferente en la tarde. Representemos por X y Y el número de veces que la máquina falla en la mañana y en la tarde, respectivamente. En la tabla 6.3 se muestra la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y).

Un cálculo fácil revela que para *todas* las ubicaciones de la tabla 6.3 tenemos

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)q(y_j).$$

Así, X y Y son variables aleatorias independientes. (Para comparar véase también el Ej. 3.7.)

TABLA 6.3

Y \ X	0	1	2	$q(y_j)$
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.04	0.08	0.08	0.2
2	0.06	0.12	0.12	0.3
$p(x_i)$	0.2	0.4	0.4	1.0

EJEMPLO 6.11. Sean X y Y la duración de dos dispositivos electrónicos. Supóngase que su fdp conjunta está dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Puesto que podemos factorizar $f(x, y) = e^{-x}e^{-y}$, se establece la independencia de X y Y.

EJEMPLO 6.12. Supóngase que $f(x, y) = 8xy$, $0 \leq x \leq y \leq 1$. (El dominio está dado por la región sombreada en la figura 6.7.) Aunque f ya está escrita en forma factorizada, X y Y *no* son independientes, puesto que el dominio de definición

$$\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

es tal que para una x dada, y puede tomar sólo valores mayores que la x dada y menores que 1. Por tanto, X y Y no son independientes.

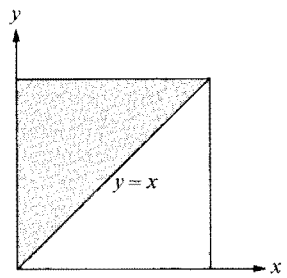


FIGURA 6.7

Observación: De la definición de la distribución marginal de probabilidades (en cualesquiera de los casos, discreto o continuo) es claro que la distribución conjunta de probabilidades determina, en forma única, la distribución marginal de probabilidades. Es decir, que conociendo la fdp f conjunta podemos obtener las fdp marginales g y h. Sin embargo, lo inverso no es verdadero. Es decir, en general, el conocimiento de las fdp marginales g y h no determina la fdp conjunta f. Esto sólo es verdadero cuando X y Y son independientes, porque en este caso tenemos $f(x,y) = g(x)h(y)$.

El resultado siguiente indica que nuestra definición de variables aleatorias independientes está de acuerdo con nuestra definición previa de eventos independientes.

Teorema 6.2. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Sean A y B eventos cuya ocurrencia (o no ocurrencia) depende sólo de X y Y respectivamente. (Esto es, A es un subconjunto de R_x, el recorrido de X, mientras que B es un subconjunto de R_y, el recorrido de Y.) Entonces, si X y Y son variables aleatorias independientes, tenemos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Demostración: (sólo el caso continuo):

$$P(A \cap B) = \iint_{A \cap B} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A \cap B} g(x)h(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_A g(x)\,dx \int_B h(y)\,dy = P(A)P(B).$$

6.4 Funciones de una variable aleatoria

Al definir una variable aleatoria X señalamos enfáticamente que X es una *función* definida del espacio muestral S a los números reales. Al definir una variable aleatoria bidimensional (X,Y), tratamos un par de funciones, $X = X(s)$, $Y = Y(s)$, cada una de las cuales está definida en el espacio muestral de algún experimento y cada una de las cuales asigna un número real a cada $s \in S$, produciendo así el vector bidimensional $[X(s), Y(s)]$.

Consideremos ahora $Z = H_1(X,Y)$, una función de las dos variables aleatorias X y Y. Debe ser claro que $Z = Z(s)$ es otra vez una variable

aleatoria. Consideremos la siguiente sucesión de pasos:

a) Se realiza el experimento ε y se obtiene el resultado s.
b) Se evalúan los números $X(s)$ y $Y(s)$.
c) Se evalúa el número $Z = H_1[X(s), Y(s)]$.

El valor de Z depende claramente de s, el resultado original del experimento. Esto es, $Z = Z(s)$ es una función que asigna a cada resultado $s \in S$ un número real, $Z(s)$. Por lo tanto, Z es una variable aleatoria. Algunas variables aleatorias importantes que nos van a interesar son $X + Y$, XY, X/Y, mín (X, Y), máx (X, Y), etcétera.

El problema que resolvimos en el capítulo anterior para la variable aleatoria unidimensional aparece otra vez: dada la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y), ¿cuál es la distribución de probabilidades de $Z = H_1(X, Y)$? (Debe haber quedado claro en los numerosos tratamientos previos sobre este punto que una distribución de probabilidades se *induce* en R_z, el espacio muestral de Z.)

Si (X, Y) es una variable aleatoria discreta, este problema se resuelve fácilmente. Supóngase que (X, Y) tiene la distribución dada en los ejemplos 6.1 y 6.4. Las siguientes variables aleatorias (unidimensionales) podrían ser de interés:

U = mín (X, Y) = el menor número de artículos producidos por las dos líneas;

V = máx (X, Y) = el mayor número de artículos producido por las dos líneas;

$W = X + Y$ = número total de artículos producidos por las dos líneas.

Para obtener la distribución de probabilidades de U, por ejemplo, procedemos como sigue. Los valores posibles de U son: 0,1,2 y 3. Para evaluar $P(U = 0)$ argumentamos que $U = 0$ si y sólo si ocurre uno de los casos siguientes: $X = 0$, $Y = 0$ o $X = 0$, $Y = 1$ o $X = 0$, $Y = 2$ o $X = 0$, $Y = 3$ o $X = 1$, $Y = 0$ o $X = 2$, $Y = 0$ o $X = 3$, $Y = 0$ o $X = 4$, $Y = 0$ o $X = 5$, $Y = 0$. Por lo tanto, $P(U = 0) = 0.28$. El resto de las probabilidades asociadas con U se pueden obtener de manera semejante. Por tanto, la distribución de probabilidades de U se puede resumir como sigue: u : 0, 1, 2, 3; $P(U = u)$: 0.28, 0.30, 0.25, 0.17. La distribución de probabilidades de las variables aleatorias V y W, como se definió anteriormente, se puede obtener de una manera semejante. (Véase el Prob. 6.9.)

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua y si $Z = H_1(X,Y)$ es una función continua de (X,Y), entonces Z será una variable aleatoria continua (unidimensional) y el problema de encontrar su fdp es algo más complicado. Para resolver este problema necesitamos un teorema que vamos a indicar y analizar a continuación. Antes de hacerlo, bosquejemos la idea básica.

Para encontrar la fdp de $Z = H_1(X,Y)$ a menudo es más simple introducir una segunda variable aleatoria, digamos $W = H_2(X,Y)$, y obtener primero la fdp *conjunta* de Z y W, digamos $k(z,w)$. Conociendo $k(z,w)$, entonces podemos obtener la fdp de Z, digamos $g(z)$, al integrar simplemente $k(z,w)$ respecto a w. Esto es,

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(z,w)\,dw$$

Los problemas que quedan son 1) cómo encontrar la fdp conjunta de Z y W, y 2) cómo elegir la variable aleatoria apropiada $W = H_2(X,Y)$. Para resolver el último problema, simplemente digamos que en general hacemos la elección más sencilla posible de W. En el contexto presente, W desempeña sólo un papel intermediario, y en realidad no nos interesa en sí misma. Con el fin de encontrar la fdp conjunta de Z y W necesitamos el teorema 6.3.

Teorema 6.3. Supongamos que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua con fdp conjunta f. Sea $Z = H_1(X,Y)$ y $W = H_2(X,Y)$, y supongamos que las funciones H_1 y H_2 satisfacen las condiciones siguientes:

a) Las ecuaciones $z = H_1(x,y)$ y $w = H_2(x,y)$ se pueden resolver únicamente para x y y en términos de z y w, digamos $x = G_1(z,w)$ y $y = G_2(z,w)$.

b) Las derivadas parciales $\partial x/\partial z$, $\partial x/\partial w$, $\partial y/\partial z$ y $\partial y/\partial w$ existen y son continuas.

Entonces la fdp conjunta de (Z,W), digamos $k(z,w)$, está dada por la expresión siguiente: $k(z,w) = f[G_1(z,w),G_2(z,w)] \mid J(z,w)$ donde $J(z,w)$, es el siguiente determinante 2×2:

$$J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Este determinante se llama *jacobiano* de la transformación $(x, j) \rightarrow (z, w)$ y algunas veces se denota con $\partial(x, y)/\partial(z, w)$. Observemos que $k(z, w)$ será distinta de cero para esos valores de (z, w) que corresponden a valores de (x, y) para los cuales $f(x, y)$ es distinta de cero.

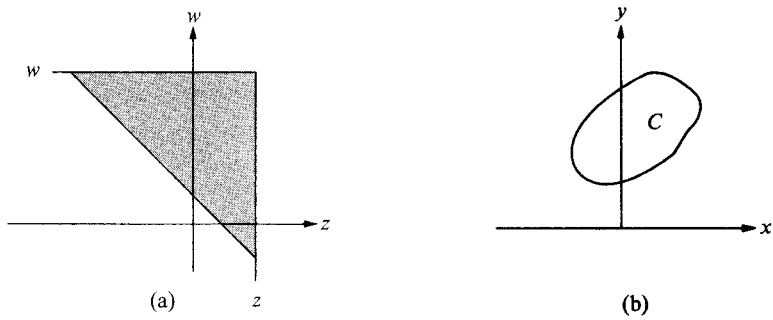


FIGURA 6.8

Observaciones: a) Aunque no demostraremos este teorema, por lo menos indicaremos lo que necesita demostrarse y dónde se encuentran las dificultades. Considérese la fda conjunta de la variable aleatoria bidimensional (Z, W),

$$K(z, w) = P(Z \leq z, W \leq w) = \int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{z} k(s,t)\, ds\, dt,$$

En donde k es la fdp buscada. Puesto que se supone que la transformación $(x, y) \rightarrow (z, w)$ es de uno a uno (véase la suposición *a*) anterior), podemos encontrar el evento, equivalente a $\{Z \leq z, W \leq w\}$, en términos de X y Y. Supóngase que este evento se denota con C. (Véase la Fig. 6.8.) Esto es, $\{(X, Y) \in C\}$ si y sólo si $\{Z \leq z, W \leq w\}$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{w} \int_{-\infty}^{z} k(s,t)\, ds\, dt = \int_{C}\int f(x, y)\, dx\, dy.$$

Puesto que se supone que f es conocida, puede calcularse el segundo miembro de la integral. Diferenciándola respecto a z y w obtenemos la fdp requerida. En la mayoría de los textos de cálculo avanzado se demuestra que estas técnicas conducen al resultado formulado en el teorema anterior.

b) Nótese la gran semejanza entre el resultado anterior y el obtenido en el caso unidimensional tratado en el capítulo anterior. (Véase el Teorema 5.1.) La condición de monotonía de la función $y = H(x)$ se sustituye por la condición de que la correspondencia entre (x, y) y (z, w) es uno a uno. La condición de diferenciabilidad se sustituye por ciertas suposiciones acerca

de las derivadas parciales consideradas. La solución final que se obtiene es también muy semejante a la obtenida en el caso unidimensional: las variables x y y sencillamente se sustituyen por sus expresiones equivalentes en términos de z y w, y el valor absoluto de dx/dy se sustituye por el valor absoluto del jacobiano.

EJEMPLO 6.13. Supóngase que estamos apuntando a un blanco circular de radio uno que se ha colocado de modo que su centro está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares (Fig. 6.9). Supóngase que las coordenadas (X, Y) de los puntos de impacto están distribuidas uniformemente en el círculo. Es decir,

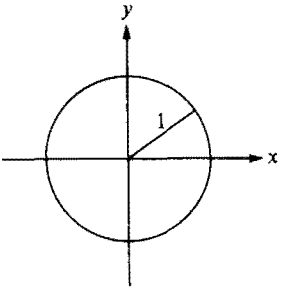


FIGURA 6.9

$$f(x, y) = 1/\pi \quad \text{si } (x, y) \text{ queda en el interior o sobre el círculo,}$$

$$= 0 \qquad \text{en otro punto.}$$

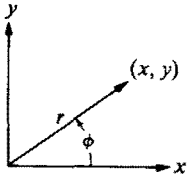


FIGURA 6.10

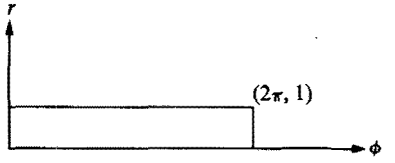


FIGURA 6.11

Supóngase que estamos interesados en la variable aleatoria R que representa la *distancia* del origen. (Véase la Fig. 6.10.) Es decir, $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Encontramos la fdp de R, digamos g, como sigue: sea $\Phi = \tan^{-1}(Y/X)$. Por tanto, $X = H_1(R, \Phi)$ y $Y = H_2(R, \Phi)$, donde $x = H_1(r, \phi) = r\cos\phi$ y $y = H_2(r, \phi) = r\,\text{sen}\,\phi$. (Simplemente hemos introducido coordenadas polares.)

El jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\,\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & r\cos\phi \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\phi + r\,\text{sen}^2\phi = r.$$

En la transformación anterior, el círculo unitario en el plano $x\,y$ está en correspondencia con el rectángulo en el plano ϕr en la figura 6.11. Por tanto, la fdp conjunta de (Φ, R) está dada por

$$g(\phi, r) = \frac{r}{\pi}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Así, la fdp pedida de R, digamos h, está dada por

$$h(r) = \int_0^{2\pi} g(\phi, r)\, d\phi = 2r, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Observación: Este ejemplo señala la importancia de obtener una representación precisa de la región de los valores posibles introducidos por la nueva variable aleatoria.

6.5 Distribución del producto y del cociente de variables aleatorias independientes

Entre las funciones de X y Y más importantes que deseamos considerar están la suma $S = X + Y$, el producto $W = XY$ y el cociente $Z = X/Y$. Podemos usar el método de esta sección para obtener las fdp de cada una de esas variables aleatorias en condiciones muy generales.

En el capítulo 12 estudiaremos la suma de variables aleatorias con mayor detalle. Por tanto, postergaremos hasta entonces el análisis de la distribución de probabilidades de $X + Y$. Sin embargo, consideraremos el producto y el cociente en los dos teoremas siguientes.

Teorema 6.4. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua y supongamos que X y Y son *independientes*. Por tanto, la fdp f se puede escribir como $f(x, y) = g(x)h(y)$. Sea $W = XY$. Luego, la fdp de W, digamos p, está dada por

$$p(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du. \tag{6.9}$$

Demostración: Sea $w = xy$ y $u = x$. Así, $x = u$ y $y = w/u$. El jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-w}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}.$$

Por tanto, la fdp conjunta de $W = XY$ y $U = X$ es

$$s(w,u) = g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right|.$$

La fdp marginal de W se obtiene al integrar $s(w,u)$ respecto a u, lo que da el resultado pedido. Los valores de w para los cuales $p(w) > 0$ dependen de los valores (x,y) con los cuales $f(x,y) > 0$.

Observación: Al evaluar la integral anterior se puede usar el hecho de que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\left|\frac{1}{u}\right| du = \int_{0}^{\infty} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\frac{1}{u}\,du - \int_{-\infty}^{0} g(u)h\left(\frac{w}{u}\right)\frac{1}{u}\,du.$$

EJEMPLO 6.14. Supóngase que tenemos un circuito en el cual la corriente I y la resistencia R varían de modo aleatorio. Supóngase específicamente que I y R son variables aleatorias continuas independientes con las siguientes fdp.

$$I : g(i) = 2i, \qquad 0 \le i \le 1 \quad \text{y 0 en otra parte;}$$
$$R : h(r) = r^2/9, \quad 0 \le r \le 3 \quad \text{y 0 en otra parte.}$$

Es de interés la variable aleatoria $E = IR$ (el voltaje en el circuito). Sea p la fdp de E.

Según el teorema 6.4 tenemos

$$p(e) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(i)h\left(\frac{e}{i}\right)\left|\frac{1}{i}\right| di.$$

Se debe tener cuidado al evaluar esta integral. Nótese, primero, que la variable de integración no puede tomar valores negativos; segundo, que con el fin de que el integrando sea positivo, *ambas* fdp que aparecen en él deben ser positivas. Considerando los valores para los cuales g y h no son iguales a cero, encontramos que deben satisfacerse las condiciones siguientes:

$$0 \le i \le 1 \quad \text{y} \quad 0 \le e/i \le 3.$$

Estas *dos* desigualdades son, a su vez, equivalentes a $e/3 \le i \le 1$. Por tanto, la integral anterior se convierte en

$$p(e) = \int_{e/3}^{1} 2i\frac{e^2}{9i^2}\frac{1}{i}\,di$$

$$= -\frac{2}{9}e^2\frac{1}{i}\Big|_{e/3}^{1}$$

$$= \frac{2}{9}e(3-e), \quad 0 \le e \le 3.$$

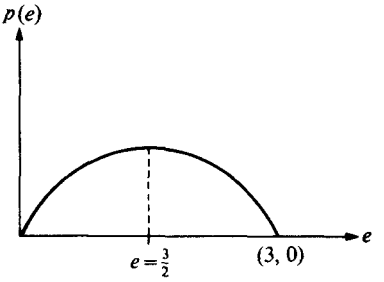


FIGURA 6.12

Un cálculo fácil demuestra que $\int_0^3 p(e)\,de = 1$. (Véase la Fig. 6.12.)

Teorema 6.5. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua y supóngase que X y Y son independientes. [Por tanto, la fdp de (X, Y) puede escribirse como $f(x, y) = g(x)h(y)$.] Sea $Z = X/Y$. Entonces la fdp de Z, digamos q, está dada por

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v)\,|v|\,dv.$$

Demostración: Sea $z = x/y$ y sea $v = y$. Por tanto, $x = vz$ y $y = v$. El jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v.$$

Por tanto, la fdp conjunta de $Z = X/Y$ y $V = Y$ es igual a

$$t(z, v) = g(vz)h(v)\,|v|\,.$$

Integrando esta fdp conjunta respecto a v, se obtiene la fdp marginal de Z.

EJEMPLO 6.15. Representemos con X y Y la duración de dos bombillas fabricadas mediante dos procedimientos distintos. Supongamos que X y Y son variables aleatorias independientes con fdp f y g, respectivamente, donde

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \ge 0, \quad \text{y 0 en otra parte;}$$

$$g(y) = 2e^{-2y}, \quad y \le 0, \quad \text{y 0 en otra parte.}$$

Podría ser de interés la variable aleatoria X/Y, que representa la razón de las dos duraciones. Sea q la fdp de Z.

Según el teorema 6.5 tenemos $q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(vz)h(v)\,|v|\,dv$. Puesto que X y Y sólo pueden tomar cantidades no negativas, la integración anterior únicamente necesita calcularse sobre los valores positivos de la variable de integración. Además, el integrando será positivo sólo cuando las *dos* fdp que aparecen sean positivas. Esto implica que debemos tener $v \geq 0$ y $vz \geq 0$. Puesto que $z > 0$, estas desigualdades implican que $v \geq 0$.

Así, lo anterior se convierte en

$$q(z) = \int_0^\infty e^{-vz} 2e^{-2v} v\,dv = 2\int_0^\infty ve^{-v(2+z)}\,dv.$$

Una fácil integración por partes da

$$q(z) = \frac{2}{(z+2)^2}, \quad z \geq 0.$$

(Véase la Fig. 6.13.) De nuevo es un ejercicio fácil verificar que $\int_0^\infty q(z)\,dz = 1$.

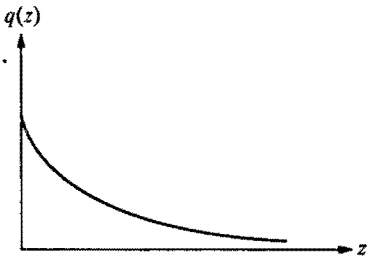


FIGURA 6.13

6.6 *Variables aleatorias* n*-dimensionales*

Hasta ahora nuestra exposición se ha restringido a variables aleatorias bidimensionales. Sin embargo, como lo indicamos al principio de este capítulo, podemos interesarnos en tres o más características numéricas simultáneas.

Sólo haremos una brevísima exposición de las variables aleatorias n-dimensionales. La mayor parte de los conceptos antes presentados para el caso bidimensional se pueden extender al caso n-dimensional. Nos limitaremos al caso continuo. (Véase la nota al final de este capítulo.)

Supongamos que $(X_1, \ldots, X_n)$ puede tomar todos los valores en una región del espacio n-dimensional. Esto es, el valor es un vector n-dimensional

$$(X_1(s), \ldots, X_n(s)).$$

Caracterizamos la distribución de probabilidades $(X_1, \ldots, X_n)$ como sigue.

Existe una función de densidad de probabilidades conjunta f que satisface las condiciones siguientes:

a) $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ para toda $(x_1, \ldots, x_n)$.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = 1$.

Con la ayuda de esta fdp *definimos*

$$P[(X_1, \ldots, X_n) \in C] = \int_C \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n,$$

donde C es un subconjunto del recorrido de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Con cada variable aleatoria n-dimensional podemos asociar un número de variables aleatorias de dimensión inferior. Por ejemplo, si $n = 3$, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2 = g(x_3),$$

donde g es la fdp marginal de una variable aleatoria unidimensional X_3, mientras que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = h(x_1, x_2),$$

donde h representa la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X_1, X_2), etc. El concepto de variables aleatorias independientes también se extiende de una manera natural. Decimos que $(X_1, \ldots, X_n)$ son variables aleatorias independientes si y sólo si su fdp conjunta $f(x_1, \ldots, x_n)$ se puede factorizar en

$$g_1(x_1) \cdots g_n(x_n).$$

Hay muchos casos en los cuales deseamos considerar las variables aleatorias n-dimensionales. Daremos unos cuantos ejemplos.

a) Supóngase que estudiamos el patrón de precipitación debido a un sistema particular de tormentas. Si tenemos una red de, digamos 5 estaciones de observación, y si X_i es la cantidad de lluvia caída en la estación i debido a un sistema frontal particular, querríamos considerar la variable penta-dimensional $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$.

b) Una de las aplicaciones más importantes de las variables aleatorias n-dimensionales se presenta cuando tratamos con medidas repetidas de una variable aleatoria X. Supóngase que se pide información acerca de la duración, X, de cierto tubo electrónico. Un fabricante produce un gran número de estos tubos, de los cuales probamos n. Sea X_i la duración del i-ésimo tubo, $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, $(X_1, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional. Si suponemos que cada X_i tiene la misma distribución de probabilidades (puesto que todos los tubos se producen de la misma manera), y que las X_i son todas variables aleatorias independientes (puesto que, posiblemente, la producción de un tubo no afecta la producción de los otros), podemos suponer que la variable aleatoria n-dimensional $(X_1, \ldots, X_n)$ está formada de los componentes $X_1, \ldots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidos. (Debe ser obvio que aunque X_1 y X_2 tienen la misma distribución, no necesitan adoptar el mismo valor.)

c) Otra manera en que aparecen las variables aleatorias n-dimensionales es la siguiente. Representemos con $X(t)$ la potencia requerida por cierta empresa industrial durante un tiempo t. Para t fija, $X(t)$ es una variable aleatoria unidimensional. Sin embargo, podemos estar interesados en establecer la potencia requerida en determinados n tiempos específicos, digamos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Así, deseamos estudiar la variable aleatoria n-dimensional.

$$[X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)].$$

Este tipo de problemas se estudia a un nivel más avanzado. (Una referencia excelente para este tema es el libro *Stochastic Processes* por Emanuel Parzen, San Francisco, Holden–Day, 1962.)

Observación: En alguna parte de nuestra exposición nos referimos al concepto de "n-espacio". Resumamos algunas de las ideas básicas necesarias.

Con cada número real x podemos asociar un punto sobre la recta de los números reales y recíprocamente. De igual manera, con cada par de números reales (x_1, x_2) podemos asociar un punto en el plano rectangular de coordenadas y recíprocamente. Para finalizar, con cada conjunto de tres números reales (x_1, x_2, x_3) podemos asociar un punto en el espacio tridimensional de coordenadas y recíprocamente.

En muchos de los problemas que nos interesan tratamos un conjunto de n números reales, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, también llamado una n-tupla. Aunque no es posible dibujar ninguna gráfica, si $n > 3$, para continuar podemos adoptar la terminología geométrica sugerida por los casos de dimensión menor citados

anteriormente. Así, hablaremos de un "punto" en un n-espacio dimensional determinado por la n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$. Definiremos como n-espacio (algunas veces llamado n-espacio euclidiano) el conjunto de todas las $(x_1, \ldots, x_n)$, donde x_i puede ser cualquier número real.

Aunque en realidad no necesitaremos evaluar integrales n-dimensionales, vamos a encontrar que es un concepto muy útil y algunas veces necesitamos expresar una cantidad como una integral múltiple. Si recordamos la definición de

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy,$$

donde A es una región del plano (x, y), entonces la extensión de este concepto a

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

donde R es una región en el n-espacio, sería justificada. Si f representa la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y), entonces

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

representa $P[(X, Y) \in A]$. Análogamente, si f representa la fdp conjunta de $(X_1, \ldots, X_n)$, entonces

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

representa

$$P[(X_1, \ldots, X_n) \in R].$$

PROBLEMAS

6.1. Supóngase que la tabla siguiente representa la distribución de probabilidades conjunta de la variable aleatoria discreta (X, Y). Calcular todas las distribuciones marginales y condicionales.

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$

6.2. Supóngase que la variable aleatoria bidimensional (X,Y) tenga fdp conjunta

$$f(x,y) = kx(x-y), \quad 0 < x < 2, \quad -x < y < x,$$
$$= 0, \quad \text{en otra parte.}$$

a) Evaluar la constante k.
b) Encontrar la fdp marginal de X.
c) Encontrar la fdp marginal de Y

6.3. Supóngase que la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X,Y) está dada por

$$f(x,y) = x^2 + \frac{xy}{3}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2,$$
$$= 0, \quad \text{en otra parte.}$$

Calcular lo siguiente.

a) $P(X > \frac{1}{2})$; *b*) $P(Y < X)$; *c*) $P(Y < \frac{1}{2} \mid X < \frac{1}{2})$.

6.4. Supóngase que se sacan dos cartas al azar de una baraja. Sea X el número de ases obtenidos y Y el número de reinas obtenidas.

a) Obtener la distribución de probabilidades conjunta de (X,Y).
b) Obtener la distribución marginal de X y de Y.
c) Obtener la distribución condicional de X (dada Y) y de Y (dada X).

6.5. ¿Para que valores de k es $f(x,y) = ke^{-(x+y)}$ una fdp conjunta de (X,Y) en la región $0 < x < 1$, $0 < y < 1$?

6.6. Supóngase que la variable aleatoria bidimensional continua (X,Y) está distribuida uniformemente en el cuadrado cuyos vértices son (1,0), (0,1), (-1,0) y (0,-1). Encontrar las fdp marginales de X y de Y.

6.7. Supóngase que las dimensiones, X y Y, de una plancha metálica rectangular se pueden considerar como variables aleatorias continuas independientes con las siguientes fdp.

$$\begin{aligned} X: \quad g(x) &= x - 1, \quad 1 < x \leq 2, \\ &= -x + 3, \quad 2 < x < 3, \\ &= 0, \quad \text{en otra parte.} \\ Y: \quad h(y) &= \tfrac{1}{2}, \quad 2 < y < 4, \\ &= 0 \quad \text{en otra parte.} \end{aligned}$$

Encontrar la fdp del área de la plancha, $A = XY$.

6.8. Representar con X la duración de un dispositivo electrónico y suponer que X es una variable aleatoria continua con fdp

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1000}{x^2}, \quad x > 1000, \\ &= 0 \quad \text{en otra parte.} \end{aligned}$$

Sean X_1 y X_2 dos determinaciones independientes de la anterior variable aleatoria X. (Es decir, suponer que se está probando la duración de dos de tales dispositivos.) Encontrar la fdp de la variable aleatoria $Z = X_1/X_2$.

6.9. Obtener la distribución de probabilidades de las variables aleatorias V y W presentadas en la p.138.

6.10. Demostrar el teorema 6.1.

6.11. La fuerza magnética H en un punto P, a X unidades de un alambre que transporta una corriente I, está dada por $H = 2I/X$. (Véase la Fig. 6.14.) Supóngase que P es un punto variable. Es decir, X es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en (3, 5). Supóngase que la corriente I es también una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en (10, 20), y además, que las variables aleatorias X e I son independientes. Encontrar la fdp de la variable aleatoria H.

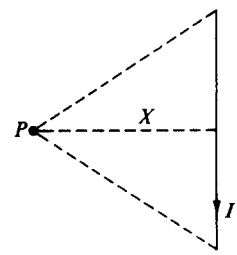


FIGURA 6.14

6.12. La intensidad de la luz en un punto determinado está dada por la relación $I = C/D^2$, donde C es la potencia luminosa de la fuente y D es la distancia de la fuente al punto dado. Supóngase que C está distribuida uniformemente en (1, 2), mientras que D es una variable aleatoria continua

con fdp $f(d) = e^{-d}, d > 0$. Encontrar la fdp de I, si C y D son independientes. [*Indicación*: Hallar primero la fdp de D^2 y luego aplicar los resultados de este capítulo.]

6.13. Cuando una corriente de I (amperes) pasa por una resistencia de R (ohms), la potencia generada está dada por $W = I^2R$ (watts). Supóngase que I y R son variables aleatorias independientes con las siguientes fdp.

$$\begin{aligned} I: \quad f(i) &= 6i(1-i), \quad 0 \leq i \leq 1, \\ &= 0 \quad \text{en otra parte.} \\ R: \quad g(r) &= 2r, \quad 0 < r < 1, \\ &= 0 \quad \text{en otra parte.} \end{aligned}$$

Determinar la fdp de la variable aleatoria W y dibujar su gráfica.

6.14. Supóngase que la fdp conjunta de (X, Y) está dada por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{-y}, \quad \text{para } x > 0, \quad y > x, \\ &= 0 \quad \text{en otra parte.} \end{aligned}$$

a) Encontrar la fdp marginal de X.
b) Encontrar la fdp marginal de Y.
c) Evaluar $P(X > 2 \mid Y < 4)$.

7

Otras características de las variables aleatorias

7.1 El valor esperado de una variable aleatoria

Consideremos la relación determinista $ax + by = 0$. Reconozcámosla como una relación lineal entre x y y. Las constantes a y b son *parámetros* de esta relación en el sentido de que para cualquier elección particular de a y b obtenemos una función lineal específica. En otros casos, uno o más parámetros pueden caracterizar la relación que se considera. Por ejemplo, si $y = ax^2 + bx + c$ son necesarios tres parámetros. Si $y = e^{-kx}$ un parámetro es suficiente. No sólo una relación particular se caracteriza por los parámetros sino, recíprocamente, por cierta relación podemos definir varios parámetros pertinentes. Por ejemplo, si $ay + bx = 0$, entonces $m = -b/a$ representa la pendiente de la recta, y si $y = ax^2 + bx + c$, entonces $-b/2a$ representa el valor para el cual existe un máximo relativo o un mínimo relativo.

En los modelos matemáticos no deterministas o aleatorios que hemos considerado, los parámetros también pueden usarse para señalar la distribución de probabilidades. Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca

de la distribución (tal como la pendiente de una recta proporciona una información útil acerca de la relación lineal que representa).

EJEMPLO 7.1. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con fdp $f(x) = ke^{-kx}$, $x \geq 0$. Para verificar que ésta es una fdp observe que $\int_0^\infty ke^{-kx}\,dx = 1$ para toda $k > 0$, y que $ke^{-kx} > 0$ para $k > 0$. Esta distribución se llama distribución exponencial, la cual estudiaremos más adelante con mayor detalle. Es una distribución muy útil para representar la duración, digamos X, de cierta clase de componentes de equipos. La interpretación de k, en este sentido, también se analizará posteriormente.

EJEMPLO 7.2. Supongamos que en una línea indefinida de montaje se produce un artículo dado. La probabilidad de que un artículo sea defectuoso es p, y este valor es el mismo para todos los artículos. Supóngase también que los artículos sucesivos son defectuosos (D) o no defectuosos (N), independientemente uno de otro. Sea la variable aleatoria X el número de artículos inspeccionados hasta que se encuentra el primer artículo defectuoso. Así, un resultado típico del experimento sería de la forma $N\,N\,N\,N\,D$. Por tanto, $X(N\,N\,N\,N\,D) = 5$. Los valores posibles de X son: $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Puesto que $X = k$ si y sólo si los primeros $(k-1)$ artículos son no defectuosos y el k-ésimo artículo es defectuoso, asignamos al evento la probabilidad siguiente $\{X = k\}$: $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Para verificar que ésta es una legítima distribución de probabilidades observemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} = p\left[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots\right]$$

$$= p\frac{1}{1-(1-p)} = 1 \quad \text{si} \quad 0 < |p| < 1.$$

Así, el parámetro p puede ser cualquier número que satisfaga $0 < p < 1$.

Supongamos que se especifican una variable aleatoria y su distribución de probabilidades. ¿Hay alguna manera de establecer esta distribución en función de unos cuantos parámetros numéricos apropiados?

Antes de continuar con la pregunta anterior, motivemos nuestro análisis considerando el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7.3. Una máquina corta alambre de una longitud determinada. Debido a cierta imprecisión del mecanismo de corte, el largo del

alambre cortado (en pulgadas), digamos X, se puede considerar como una variable aleatoria distribuida uniformemente en $[11.5, 12.5]$. El largo específico es de 12 pulgadas. Si $11.7 \leq X < 12.2$, el alambre se puede vender con una utilidad de \$0.25. Si $X \geq 12.2$, el alambre se puede cortar de nuevo y, por consiguiente, se obtiene una utilidad de \$0.10. Y si $X < 11.7$, el alambre se desecha con una pérdida de \$0.02. Un cálculo sencillo indica que $P(X \geq 12.2) = 0.3$, $P(11.7 \leq X < 12.2) = 0.5$ y $P(X < 11.7) = 0.2$.

Supongamos que se corta un gran número de muestras de alambre, digamos N. Sea N_S el número de muestras para las cuales $X < 11.7$, N_R el número de muestras para las cuales $11.7 \leq X < 12.2$ y N_L el número de muestras para las cuales $X \geq 12.2$. Por tanto, la utilidad total obtenida de la producción de N muestras es igual a $T = N_S(-0.02) + N_R(0.25) + N_L(0.10)$. La *utilidad total por alambre cortado*, digamos W, es igual a $W = (N_S/N)(-0.02) + (N_R/N)(0.25) + (N_L/N)(0.1)$. (Obsérvese que W es una variable aleatoria, puesto que N_S, N_R y N_L son variables aleatorias.)

Ya hemos mencionado que la frecuencia relativa de un evento está cercana a la probabilidad de ese evento, si el número de repeticiones en las que se basa la frecuencia relativa es grande. (Discutiremos esto con más precisión en el capítulo 12.) Por tanto, si N es grande, esperaríamos que N_S/N esté cercana a 0.2, N_R/N esté cercana a 0.5 y N_L/N esté cercana a 0.3. Entonces para N grande, W podría aproximarse como sigue:

$$W \simeq (0.2)(-0.02) + 0.5(0.25) + (0.3)(0.1) = \$0.151.$$

Así, si se produjera un gran número de alambres, esperaríamos tener una utilidad de \$0.151 por alambre. El número 0.151 se llama *valor esperado* de la variable aleatoria W.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ y sea $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ Entonces el *valor esperado* de X (o esperanza matemática de X), que se denota con $E(X)$, se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) \tag{7.1}$$

si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ converge absolutamente, es decir, si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$. Este número también se designa como *valor promedio* de X.

Observaciones: a) Si X toma sólo un número finito de valores, la expresión anterior se convierte en $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)x_i$. Ésta se puede considerar como un "promedio ponderado" de los valores posibles $x_1, \ldots, X_n$. Si todos los valores posibles son igualmente probables, $E(X) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$, lo que representa el promedio aritmético ordinario de los n valores posibles.

b) Si se lanza un dado regular y la variable aleatoria X designa el número de puntos que salen, entonces $E(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$. Este ejemplo sencillo ilustra notablemente, que $E(X)$ no es el resultado que esperaríamos cuando X se observa una sola vez. ¡De hecho, en la situación anterior, $E(X) = \frac{7}{2}$ no es siquiera un valor *posible* de X! Por el contrario, si obtenemos un gran número de observaciones independientes de X, tales como $x_1, \ldots, x_n$, y calculamos el promedio aritmético de esos resultados, entonces, en condiciones generales regulares, el promedio aritmético estará cercano a $E(X)$ en un sentido probabilístico. Por ejemplo, en la situación anterior, si lanzáramos el dado un gran número de veces y luego calculáramos el promedio aritmético de los diversos resultados, esperaríamos que este promedio llegase a estar más cercano a $\frac{7}{2}$ cuanto más veces se lance el dado.

c) Se debe observar la similitud entre la noción de valor esperado como se definió anteriormente (en especial si X puede tomar sólo un número finito de valores) y la noción del promedio de un conjunto de números, como, $z_1, \ldots, z_n$. Usualmente definimos $\bar{z} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} z_i$ como el promedio aritmético de los números $z_1, \ldots, z_n$. Supóngase, además, que tenemos los números $z_1', \ldots, z_k'$, donde z_i' ocurre n_i veces, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Haciendo $f_i = n_i/n$, $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$, definimos el promedio ponderado de los números $z_1', \ldots, z_k'$ como

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i z_i' = \sum_{i=1}^{k} f_i Z_i'.$$

Aunque hay una fuerte semejanza entre el promedio ponderado anterior y la definición de $E(X)$, es importante señalar que este último es un número (parámetro) asociado con una distribución de probabilidades teórica, mientras que el primero es simplemente el resultado de combinar un conjunto de números de una manera especial. Sin embargo, es más que una semejanza superficial. Consideremos una variable aleatoria X y sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores obtenidos cuando el experimento que da origen a X se realizó n veces independientes (Es decir, $x_1, \ldots, x_n$ simplemente representa los resultados de n medidas repetidas de la característica numérica X.) Sea $\bar{x}$ el promedio aritmético de

esos n números. Entonces, como analizaremos con más precisión en el capítulo 12, si n es suficientemente grande, $\bar{x}$ estará "cercana" a $E(X)$ en un determinado sentido. Este resultado está muy relacionado con la idea (que también se estudiará en el capítulo 12) de que la frecuencia relativa f_A asociada con n repeticiones de un experimento estará cercana a la probabilidad $P(A)$ si f_A se basa en un gran número de repeticiones de ε.

EJEMPLO 7.4. Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% es defectuoso y el 90% no lo es. Si se produce un artículo defectuoso el fabricante pierde \$1, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de \$5. Si X es la utilidad neta por artículo, entonces X es una variable aleatoria cuyo valor esperado se calcula como $E(X) = -1(0.1) + 5(0.9) = \$4.40$. Supongamos que se produce un gran número de esos artículos. Entonces, puesto que el fabricante perderá \$1 alrededor del 10% de las veces y ganará \$5 alrededor del 90% de las veces, esperará obtener alrededor de \$4.40 por artículo a la larga.

Teorema 7.1. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p, con base en n repeticiones de un experimento. Entonces

$$E(X) = np.$$

Demostración: Puesto que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, tenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

(ya que el término con $k = 0$ es igual a cero). Sea $s = k - 1$ en la suma anterior. Como k toma valores de uno hasta n, s toma valores de cero hasta $(n-1)$. Sustituyendo k en todas partes por $(s+1)$ obtenemos

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{s=0}^{n-1} n \binom{n-1}{s} p^{s+1} (1-p)^{n-s-1} \\ &= np \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-1-s} \end{aligned}$$

La suma en la última expresión es simplemente la suma de probabilidades binomiales con n sustituida por $(n-1)$ [esto es, $(p+(1-p))^{n-1}$] que, por tanto, es igual a uno. Esto establece el resultado.

Observación: El resultado anterior corresponde ciertamente a nuestra noción intuitiva, porque se supone que la probabilidad de algún evento A es, digamos 0.3, cuando se realiza un experimento. Si repetimos este experimento 100 veces, por ejemplo, esperaríamos que A ocurriera alrededor de 100(0.3) = 30 veces. El concepto de valor esperado que antes se presentó para variables discretas, se extenderá brevemente en el caso continuo.

EJEMPLO 7.5. Una máquina impresora tiene una probabilidad constante de 0.05 de fallar en cualquier día. Si la máquina no tiene fallas durante la semana, se obtiene una utilidad de $\$S$. Si ocurren una o dos fallas, se obtiene una utilidad de $\$R$ $(R < S)$ y si ocurren tres o más fallas, la utilidad es de $\$(-L)$. (Suponemos que R, S y L son mayores que cero, y también que si la máquina falla cualquier día, permanece fuera de uso durante el resto del día.) Sea X la utilidad obtenida en una semana de cinco días. Los valores posibles de X son R, S y $(-L)$. Sea B el número de fallas por semana. Tenemos

$$P(B=k)=\binom{5}{k}(0.05)^k(0.95)^{5-k}, \quad k=0,1,\ldots,5.$$

Puesto que $X=S$ si y sólo si $B=0$, $X=R$ si y sólo si $B=1$ o 2 y $X=(-L)$ si y sólo si $B=3,4$ o 5, encontramos que

$$\begin{aligned} E(X) &= SP(B=0)+RP(B=1 \text{ o } 2)+(-L)P(B=3,4 \text{ o } 5) \\ &= S(0.95)^5+R\left[5(0.05)(0.95)^4+10(0.05)^2(0.95)^3\right] \\ &= (-L)\left[10(0.05)^3(0.95)^2+5(0.05)^4(0.95)+(0.05)^5\right] \text{ dólares.} \end{aligned}$$

Definición. Sea X una variable aleatoria continua con fdp f. El *valor esperado* de X se define como

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx. \tag{7.2}$$

Nuevamente puede suceder que esta integral (impropia) no converja. Por lo tanto, decimos que $E(X)$ existe si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\, dx$$

es finita.

Observación: Debemos observar la analogía entre el valor esperado de una variable aleatoria y el concepto de "centro de masa" en mecánica. Si una masa unitaria está distribuida a lo largo de la recta en los puntos discretos $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ y si $p(x_i)$ es la masa en x_i, entonces vemos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ representa el centro de masa (respecto al origen). De modo semejante, si una masa unitaria está distribuida continuamente en una recta, y si $f(x)$ representa la densidad de masa en x, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ se puede interpretar de nuevo como el centro de masa. En el sentido anterior, $E(X)$ puede representar "un centro" de la distribución de probabilidad. Algunas veces $E(X)$ se llama también medida de tendencia central y está en las *mismas unidades* que X.

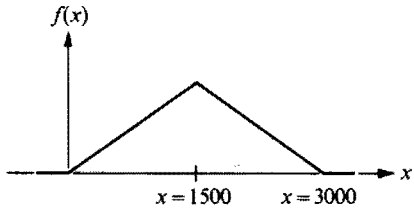


FIGURA 7.1

EJEMPLO 7.6. Vamos a definir la variable aleatoria X como sigue. Supongamos que X es el tiempo (en minutos) durante el cual un dispositivo eléctrico se utiliza a su máxima carga cierto periodo de tiempo determinado. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con la siguiente fdp:

$$f(x) = \frac{1}{(1500)^2}x, \quad 0 \leq x \leq 1500,$$

$$= \frac{-1}{(1500)^2}(x - 3000), \quad 1500 \leq x \leq 3000,$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Así,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{(1500)(1500)}\left[\int_0^{1500} x^2\,dx - \int_{1500}^{3000} x(x-3000)\,dx\right]$$

$$= 1500 \text{ minutos.}$$

(Véase la Fig. 7.1.)

EJEMPLO 7.7. El contenido de ceniza en el carbón (porcentaje), digamos X, se puede considerar como una variable aleatoria continua con la siguiente fdp: $f(x) = \frac{1}{4875}x^2$, $10 \leq x \leq 25$. Por lo tanto, $E(X) = \frac{1}{4875}\int_{10}^{25} x^3\,dx = 19.5\%$. Así, el contenido esperado de ceniza en la muestra particular de carbón que se considera es 19.5%.

Teorema 7.2. Supongamos a X distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$. Entonces

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Demostración: La fdp de X está dada por $f(x) = 1/(b-a)$, $a \leq x \leq b$. Por tanto,

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

(Nótese que esto representa el *punto medio* del intervalo $[a, b]$, como intuitivamente lo esperaríamos.)

Observación: Valdría la pena recordar en esta coyuntura que una variable aleatoria X es una función de un espacio muestral S con relación al recorrido R_x. Como repetidamente, lo hemos señalado, para la mayoría de las aplicaciones ésta nos ha interesado sólo en el recorrido y en las probabilidades definidas en él. Esta noción de valor esperado fue completamente definida en términos del recorrido. [Véanse las ecuaciones (7.1) y (7.2.)]. Ocasionalmente, sin embargo, deberíamos observar la naturaleza funcional de X. Por ejemplo, ¿cómo expresamos la ecuación (7.1.) en términos de los resultados $s \in S$, suponiendo que S es finita? Puesto que $x_i = X(s)$ para una $s \in S$ y puesto que

$$p(x_i) = P[s : X(s) = x_i],$$

podemos escribir

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = \sum_{s \in S} X(s)P(s), \tag{7.3}$$

donde $P(s)$ es la probabilidad de evento $\{s\} \subset S$. Por ejemplo, si el experimento consiste en clasificar tres artículos como defectuosos (D) o no defectuosos (N), un espacio muestral para este experimento sería

$$S = \{NNN, NND, NDN, DNN, NDD, DND, DDN, DDD\}.$$

Si X está definida como el número de defectuosos, y si se supone que todos los resultados anteriores son igualmente posibles, tenemos, de acuerdo con la ecuación (7.3),

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{s \in S} X(s)P(s) \\ &= 0 \cdot \left(\tfrac{1}{8}\right) + 1\left(\tfrac{1}{8}\right) + 1\left(\tfrac{1}{8}\right) + 1\left(\tfrac{1}{8}\right) + 2\left(\tfrac{1}{8}\right) + 2\left(\tfrac{1}{8}\right) + 2\left(\tfrac{1}{8}\right) + 3\left(\tfrac{1}{8}\right) \\ &= \tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por supuesto este resultado se habría podido obtener más fácilmente al aplicar en forma directa la ecuación (7.1.) Sin embargo, es bueno recordar que para emplear la ecuación (7.1.) necesitábamos conocer los valores $p(x_i)$, lo que a su vez significaba la necesidad de un cálculo como el que se utilizó antes. Lo importante es que una vez que se conoce la distribución de probabilidades sobre R_x [en este caso los valores de los números $p(x_i)$], podemos suprimir la relación funcional entre R_x y S.

7.2 Esperanza de una función de una variable aleatoria

Como lo expusimos previamente, si X es una variable aleatoria y si $Y = H(X)$ es una función de X, entonces Y es también una variable aleatoria con una distribución de probabilidades. Por lo tanto, será interesante y significativo evaluar $E(Y)$. Hay dos maneras de hacerlo que resultan equivalentes. Demostrar que en general son equivalentes no es trivial y probaremos sólo un caso especial. Sin embargo, es importante que el lector comprenda los dos planteamientos que se presentan a continuación.

Definición. Sea X una variable aleatoria y sea $Y = H(X)$.

a) Si Y es una variable aleatoria discreta con valores posibles $y_1, y_2, \ldots$ y si $q(y_i) = P(Y = y_i)$, definimos

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i q(y_i). \tag{7.4}$$

b) Si Y es una variable aleatoria continua con fdp g, definimos

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)\, dy. \tag{7.5}$$

Observación: Naturalmente, estas definiciones son por completo consistentes con la definición previa dada para el valor esperado de una variable aleatoria. De hecho, lo anterior sólo representa una repetición en términos de Y. Una "desventaja" de aplicar la definición anterior para obtener $E(Y)$ es que la distribución de probabilidades de Y (es decir, la distribución de probabilidades en el recorrido R_y) es necesaria. En el capítulo anterior expusimos métodos mediante los cuales podemos obtener ya sea las probabilidades puntuales $q(y_i)$ o g, la fdp de Y. Sin embargo, el problema que se presenta es si podemos obtener $E(Y)$ sin encontrar primero la distribución de probabilidades de Y, es decir, sólo a partir del conocimiento de la distribución de probabilidades de X. La respuesta es afirmativa, como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 7.3. Sea X una variable aleatoria y sea $Y = H(X)$.

a) Si X es una variable aleatoria discreta y $p(x_i) = P(X = x_i)$, tenemos

$$E(Y) = E\,(H(X)) = \sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j). \tag{7.6}$$

b) Si X es una variable aleatoria continua con fdp f, tenemos

$$E(Y) = E\,(H(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f(x)\, dx. \tag{7.7}$$

Observación: Este teorema hace mucho más sencilla la evaluación de $E(Y)$, porque quiere decir que no necesitamos encontrar la distribución de probabilidades de Y para evaluar $E(Y)$. Es suficiente conocer la distribución de probabilidades de X.

Demostración: [Sólo demostraremos la ecuación (7.6). La demostración de la ecuación (7.7) es un poco más complicada]. Consideremos la suma $\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_i H(x_i)p(x_i))$, donde la suma interior se toma sobre todos los índices i para los cuales $H(x_i) = y_j$ para una y_j fija. Por tanto, todos los términos $H(x_i)$ son constantes en la suma interior, de modo que

$$\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_i p(x_i).$$

Pero

$$\sum_i p(x_i) = \sum_i p\left[x_i \mid H(x_i) = y_j\right] = q(y_j).$$

Por tanto, $\sum_{j=1}^{\infty} H(x_j)p(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j q(y_j)$, lo que establece la ecuación (7.6).

Observación: El método de demostración equivale esencialmente al método de contar en el cual ponemos juntos todos los artículos que tienen el mismo valor. Así, si queremos encontrar la suma total de los valores 1, 1, 2, 3, 5, 3, 2, 1, 2, 2, 3, podemos sumarlos directamente o indicar que, puesto que hay 3 unos, 4 doses, 3 treses y 1 cinco, la suma total es igual a

$$3(1) + 4(2) + 3(3) + 1(5) = 25.$$

EJEMPLO 7.8. Sea V la velocidad del viento (kph) y supongamos que V está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 10]$. La presión, W (en lb/pie^2), sobre la superficie del ala de un aeroplano está dada por la relación: $W = 0.003\ V^2$. Para encontrar el valor esperado de W, $E(W)$, podemos proceder de dos maneras:

a) Usando el teorema 7.3, tenemos

$$\begin{aligned} E(W) &= \int_0^{10} 0.003v^2 f(v)\, dv \\ &= \int_0^{10} 0.003v^2 \frac{1}{10}\, dv \\ &= 0.1 \text{ lb/pie}^2 \end{aligned}$$

b) Usando la definición de $E(W)$, primero necesitamos encontrar la fdp de W, digamos g, y luego evaluar $\int_{-\infty}^{+\infty} wg(w)dw$. Para encontrar $g(w)$, observemos que $w = 0.003v^2$ es una función monótona de v, para $v \geq 0$. Podemos aplicar el teorema 5.1 y obtenemos

$$\begin{aligned} g(w) &= \tfrac{1}{10}\left|\frac{dv}{dw}\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{10}{3}}w^{-1/2}, \quad 0 \leq w \leq 0.3, \\ &= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E(W) = \int_0^{0.3} wg(w)\, dw = 0.1$$

después de un cálculo sencillo. Así, como lo indicó el teorema, las dos evaluaciones de $E(W)$ producen el mismo resultado.

EJEMPLO 7.9. En muchos problemas nos interesa sólo la *magnitud* de una variable aleatoria sin considerar su signo algebráico. Es decir, nos interesa $|X|$. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con la siguiente fdp:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^x}{2} \quad \text{si} \quad x \leq 0, \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \quad \text{si} \quad x > 0. \end{aligned}$$

Sea $Y = |X|$. Para obtener $\mathrm{E}(Y)$ debemos proceder de una de las dos maneras.

a) Usando el teorema 7.3, tenemos

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}(-x)e^x\, dx + \int_0^{\infty}(x)e^{-x}\, dx\right] \\ &= \tfrac{1}{2}[1+1] = 1. \end{aligned}$$

b) Para evaluar $E(Y)$ usando la definición, necesitamos obtener la fdp de $Y = |X|$, es decir g. Sea G la fda de Y. Luego,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P[|x| \leq y] = P[-y \leq X \leq y] = 2P(0 \leq X \leq y),$$

puesto que la fdp de X es simétrica respecto al cero. Por lo tanto,

$$G(y) = 2\int_0^y f(x)\,dx = 2\int_0^y \frac{e^{-x}}{2}\,dx = -e^{-y} + 1.$$

Así tenemos para g, la fdp de Y, $g(y) = G'(y) = e^{-y}$, $y \geq 0$. Por lo tanto, $E(Y) = \int_0^\infty yg(y)dy = \int_0^\infty ye^{-y}dy = 1$, como antes.

EJEMPLO 7.10. En muchos problemas podemos usar el valor esperado de una variable aleatoria a fin de tomar cierta decisión de una manera óptima.

Supóngase que un fabricante produce cierto tipo de aceite lubricante que pierde alguno de sus atributos especiales si no se usa dentro de cierto periodo de tiempo. Sea X el número de unidades de aceite pedidas al fabricante durante cada año. (Una unidad es igual a 1000 galones.) Supongamos que X es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en [2,4]. Por lo tanto, la fdp f tiene la forma,

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{2}, \quad 2 \leq x \leq 4, \\ &= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} \end{aligned}$$

Supongamos que por cada una de las unidades vendidas se obtiene una utilidad de \$300, mientras que cada una de las unidades no vendidas (durante un año determinado) produce una pérdida de \$100, ya que cada unidad no utilizada tendrá que desecharse. Consideremos que el fabricante debe decidir pocos meses antes del comienzo de cada año cuánto producirá, y que decide fabricar Y unidades (Y *no* es una variable aleatoria; está especificada por el fabricante). Sea Z la utilidad por año (en dólares). Aquí Z es desde luego una variable aleatoria, puesto que es una función de la variable aleatoria X. Específicamente, $Z = H(X)$, donde

$$\begin{aligned} H(X) &= 300\,Y \quad \text{si} \quad X \geq Y, \\ &= 300\,X + (-100)(Y - X), \quad \text{si} \quad X < Y. \end{aligned}$$

(La última expresión puede escribirse como $400X - 100Y$.)

Para obtener $E(Z)$ aplicaremos el teorema 7.3 y escribimos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{2}^{4} H(x)\,dx\,.$$

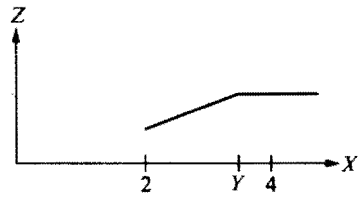


FIGURA 7.2

Para evaluar esta integral se deben considerar tres casos: $Y < 2$, $2 \leq Y \leq 4$ y $Y > 4$. Con ayuda de la figura 7.2 y después de algunas simplificaciones obtenemos

$$\begin{aligned} E(Z) &= 300\,Y \quad \text{si} \quad Y \leq 2 \\ &= -100\,Y^2 + 700\,Y - 400 \quad \text{si} \quad 2 < Y < 4 \\ &= 1200 - 100\,Y \quad \text{si} \quad Y \geq 4. \end{aligned}$$

La pregunta siguiente es interesante. ¿Cómo elegirá el fabricante el valor de Y a fin de maximizar la utilidad esperada? Podemos responder esta pregunta con facilidad al poner simplemente $dE(Z)/dY = 0$. Esto produce $Y = 3.5$. (Véase la Fig. 7.3.)

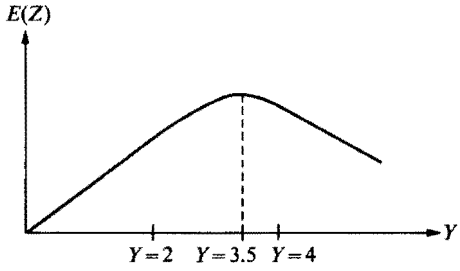


FIGURA 7.3

7.3 Variables aleatorias bidimensionales

Los conceptos expuestos anteriormente para el caso unidimensional también se mantienen para el caso de variables aleatorias de mayor dimensión. En particular, para el caso bidimensional hacemos la siguiente definición.

Definición. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional y sea $Z = H(X,Y)$ una función real de (X,Y). Por lo tanto, Z es una variable aleatoria (unidimensional) y definimos $E(Z)$ como sigue:

a) Si Z es una variable aleatoria discreta con valores posibles z_1, $z_2, \ldots$ y con

$$p(z_i) = P(Z = z_i),$$

entonces,

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p(z_i). \tag{7.8}$$

b) Si Z es una variable aleatoria continua con fdp f, tenemos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z f(z)\, dz \tag{7.9}$$

Como en el caso unidimensional, se puede demostrar el teorema siguiente (análogo al teorema 7.3).

Teorema 7.4. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional y sea $Z = H(X,Y)$.

a) Si (X,Y) es una variable aleatoria discreta y si

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), \quad i,j = 1,2,\ldots,$$

tenemos

$$E(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{x} H(x_i, y_j) p(x_i, y_j). \tag{7.10}$$

b) Si (X,Y) es una variable aleatoria continua con fdp conjunta f, tenemos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(x,y) f(x,y)\, dx\, dy \tag{7.11}$$

Observación: No demostraremos el teorema 7.4. Otra vez, como en el caso unidimensional, éste es un resultado muy útil puesto que indica que *no* necesitamos encontrar la distribución de probabilidades de la variable aleatoria Z a fin de evaluar su esperanza. Podemos encontrar directamente $E(Z)$ a partir del conocimiento de la distribución conjunta de (X, Y).

EJEMPLO 7.11. Reconsideremos el ejemplo 6.14 y encontremos $E(E)$, donde $E = IR$. Encontramos que I y R son variables aleatorias independientes con las siguientes fdp, g y h, respectivamente:

$$g(i) = 2i, \quad 0 \leq i \leq 1; \quad h(r) = r^2/9, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

También encontramos que la fdp de E es $p(e) = \frac{2}{9}e(3 - e)$, $0 \leq e \leq 3$. Puesto que I y R son variables aleatorias independientes, la fdp conjunta de (I, R) es sencillamente el producto de las fdp de I y R: $f(i, r) = \frac{2}{9}ir^2$, $0 \leq i \leq 1, 0 \leq r \leq 3$. Para evaluar $E(E)$ usando el teorema 7.4 tenemos

$$E(E) = \int_0^3 \int_0^1 ir\, f(i,r)\, di\, dr = \int_0^3 \int_0^1 ir\tfrac{2}{9}ir^2\, di\, dr$$
$$= \tfrac{2}{9}\int_0^1 i^2\, di \int_0^3 r^3\, dr = \tfrac{3}{2}.$$

Usando directamente la definición (7.9), tenemos

$$E(E) = \int_0^3 ep(e)\, de = \int_0^3 e\tfrac{2}{9}e(3 - e)\, de$$
$$= \tfrac{2}{9}\int_0^3 (3e^2 - e^3)\, de = \tfrac{3}{2}.$$

7.4 Propiedades del valor esperado

Haremos una lista de propiedades importantes del valor esperado de una variable aleatoria que será muy útil en el trabajo subsiguiente. En cada caso se supondrá la existencia de todos los valores esperados a los cuales nos referimos. Las demostraciones sólo se harán para el caso continuo. El lector debe ser capaz de dar el argumento para el caso discreto sustituyendo simplemente las integrales por sumatorias.

Propiedad 7.1. Si $X = C$, donde C es una constante, entonces $E(X) = C$.

Demostración:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Cf(x)\ dx$$

$$= C\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = C.$$

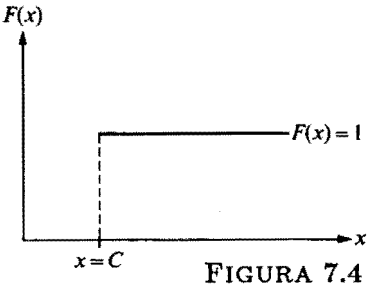


FIGURA 7.4

Observación: El significado de X igual C es el siguiente. Puesto que X es una función del espacio muestral a R_x, el significado de lo anterior es que R_x consta de un solo valor C. Por tanto, X es igual a C si y sólo si $P[X(s) = C] = 1$. Esta noción se explica mejor en términos de la fda de X. A saber, $F(x) = 0$, si $x < C$; $F(x)$ es igual a 1, si $x \geq C$ (Fig. 7.4). Algunas veces esta variable aleatoria se llama *degenerada*.

Propiedad 7.2. Supongamos que C es una constante y X es una variable aleatoria. Entonces, $E(CX) = CE(X)$

Demostración:

$$E(CX) = \int_{-\infty}^{+\infty} Cxf(x)\ dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = CE(X).$$

Propiedad 7.3. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con una distribución de probabilidades conjunta. Sean $Z = H_1(X, Y)$ y $W = H_2(X, Y)$. Entonces, $E(Z + W) = E(Z) + E(W)$.

Demostración:

$$E\ (Z + W) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [H_1(x, y) + H_2(x, y)]\, f(x, y)\ dx\ dy$$

[donde f es la fdp conjunta de (X, Y)]

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(x, y)f(x, y)\ dx\ dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(x, y)f(x, y)\ dx\ dy$$

$$= E(Z) + E(W).$$

Propiedad 7.4. Sean X y Y dos variables aleatorias cualesquiera. Entonces, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Demostración: Ésta se deduce de inmediato de la propiedad 7.3 al hacer $H_1(X,Y) = X$ y $H_2(X,Y) = Y$.

Observaciones: a) Combinando las propiedades 7.1, 7.2 y 7.4 observamos el siguiente hecho importante: si $Y = aX+b$, donde a y b son constantes, entonces $E(Y) = aE(X) + b$. En palabras, la esperanza de una función lineal es esa misma función lineal de las esperanzas. Esto *no* es cierto a menos que esté implicada una función lineal y es un error común creer que sea de otro modo. Por ejemplo, $E(X^2) \neq (E(X))^2$, $E(\ln X) \neq \ln E(X)$, etc. Así, si X toma los valores -1 y $+1$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{2}$, entonces $E(X) = 0$. Sin embargo,

$$E(X^2) = (-1)^2\left(\tfrac{1}{2}\right) + (1)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 \neq 0^2$$

b) En general, es difícil obtener expresiones para $E(1/X)$ o $E(X^{1/2})$, por ejemplo, en términos de $1/E(X)$ o $(E(X))^{1/2}$. Sin embargo, hay algunas desigualdades que son muy fáciles de derivar. (Véanse los artículos de Fleiss, Murthy y Pillai y Gurland en los números de febrero y diciembre de 1966 y abril de 1967, respectivamente, de *The American Statistician.*)

Por ejemplo, tenemos:

1) Si X toma sólo valores positivos y tiene una esperanza finita, entonces $E(1/X) \geq 1/E(X)$.
2) Con la misma hipótesis que en 1), $E(X^{1/2}) \leq (E(X))^{1/2}$.

Propiedad 7.5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias. Entonces,

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Demostración: Ésta se deduce inmediatamente de la propiedad 7.4 al aplicar la inducción matemática.

Observación: Al combinar esta propiedad con la anterior, obtenemos

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i),$$

donde las a_i son constantes.

Propiedad 7.6. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional y supongamos que X y Y son *independientes*. Entonces, $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Demostración:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyg(x)h(y)\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\ dx \int_{-\infty}^{+\infty} yh(y)\ dy = E(X)E(Y).$$

Observación: La hipótesis adicional de independencia es necesaria para establecer la propiedad 7.6, mientras que para obtener la propiedad 7.4 no se necesitó ninguna suposición.

EJEMPLO 7.12. (Este ejemplo se basa en un problema de *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* de W. Feller, pág. 225.)

Supóngase que necesitamos examinar un gran número de personas, buscando cierta característica con resultados positivo o negativo. Más aún, supongamos que se toman muestras de varias personas y se prueba la muestra combinada como una unidad, tal como puede ser el caso en ciertos tipos de exámenes de sangre.

Suposición: La muestra combinada dará un resultado negativo si y sólo si todas las muestras componentes son negativas.

Así, en el caso de resultados positivos (de la muestra combinada), *todas* las muestras deben ser individualmente probadas de nuevo para determinar cuáles son positivas. Si las N personas se dividen en n grupos de k personas (suponiendo $N = kn$) aparecen las siguientes elecciones:

a) Examinar a todas las N personas individualmente, requiriendo N pruebas.

b) Examinar grupos de k muestras, lo cual puede necesitar tan pocas como $n = N/k$ o tantas como $(k + 1)n = N + n$ pruebas.

Nuestro objetivo será estudiar el número esperado de pruebas necesarias en *b*) y luego compararlas con N.

Suposición: La probabilidad de que el resultado de la prueba sea positivo es igual a p y es la misma para todas las personas. Aún más, los resultados de las pruebas para las personas del mismo grupo que se examina son independientes. Sea X = número de pruebas necesarias para determinar la característica que se estudia para todas las N personas, y sea X_i = número de pruebas necesarias para examinar personas en el i-ésimo grupo, $i = 1, \ldots, n$.

Luego, $X = X_1 + \cdots + X_n$, y, por lo tanto, $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$, lo cual es igual a $nE(X_1)$, puesto que todas las X_i tienen la misma esperanza. Ahora X_1 sólo toma dos valores: 1 y $k + 1$. Además,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(\text{todas las } k \text{ personas en el grupo 1 son negativas}) \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(X_1 = k+1) = 1 - (1-p)^k$$

y luego,

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 1 \cdot (1-p)^k + (k+1)\left[1 - (1-p)^k\right] \\ &= k\left[1 - (1-p)^k + k^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$E(X) = nE(X_1) = N\left[1 - (1-p)^k + k^{-1}\right].$$

(La fórmula anterior es válida sólo para $k > 1$, puesto que para $k = 1$ da $E(X) = N + pn$, ¡lo cual obviamente es falso!)

Un asunto de interés es la elección de k, para la cual el anterior $E(X)$ es más pequeño. Esto se puede manejar fácilmente por algún procedimiento numérico. (Véase el Prob. 7.11a.)

Finalmente, observamos que para que la "prueba en grupo" sea preferible a la prueba individual, debemos tener $E(X) < N$, esto es, $1 - (1-p)^k + k^{-1} < 1$, lo cual equivale a $k^{-1} < (1-p)^k$. Esto *no puede* ocurrir si $(1-p) < \frac{1}{2}$, porque en ese caso, $(1-p)^k < \frac{1}{2}^k < 1/k$, la última desigualdad proviene del hecho de que $2^k > k$. Así obtenemos la siguiente conclusión importante: si p, la probabilidad de una prueba

positiva en cualquier persona determinada, es mayor que $\frac{1}{2}$, entonces de ningún modo *es aconsejable* agrupar las muestras antes de examinar. (Véase el Prob. 7.11b.)

EJEMPLO 7.13. Apliquemos algunas de las propiedades anteriores para derivar (nuevamente) la esperanza de una variable aleatoria distribuida binomialmente. El método usado puede aplicarse con ventaja en muchas situaciones semejantes.

Consideremos n repeticiones independientes de un experimento aleatorio y sea X el número de veces que ocurre un evento A. Sea p igual a $P(A)$ y supongamos que este número es constante para todas las repeticiones consideradas.

Definamos las variables aleatorias auxiliares $Y_1, \ldots, Y_n$ como sigue:

$$Y_i = 1 \quad \text{si el evento } A \text{ ocurre en la } i\text{–ésima repetición,}$$
$$= 0 \quad \text{en cualquier otro caso.}$$

Por lo tanto,

$$X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

y aplicando la propiedad 7.5, obtenemos

$$E(X) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_n).$$

Sin embargo,

$$E(Y_i) = 1(p) + 0(1 - p) = p. \quad \text{para toda } i.$$

Así, $E(X) = np$, lo que concuerda con el resultado previo.

Observación: Reinterpretemos este importante resultado. Consideremos la variable aleatoria X/n. Esta representa la frecuencia relativa del evento A entre las n repeticiones de ε. Usando la propiedad 7.2, tenemos $E(X/n) = (np)/n = p$. Esto, intuitivamente, es como debería ser, porque expresa que la frecuencia relativa esperada del evento A es p, donde $p = P(A)$. Representa la primera verificación teórica del hecho de que hay una relación entre la frecuencia relativa de un evento y la probabilidad de ese evento. En un capítulo posterior obtendremos más resultados que dan una relación mucho más precisa entre la frecuencia relativa y la probabilidad.

EJEMPLO 7.14. Supóngase que la demanda D, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con determinada distribución de probabilidades, $P(D = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Supóngase que el costo para el proveedor es C_1 dólares por artículo, mientras que él lo vende en C_2 dólares. Cualquier artículo que no se venda al término de la semana debe almacenarse con un costo de C_3 dólares por artículo. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana, ¿cuál es su utilidad esperada por semana? ¿Para qué valor de N es máxima la ganancia esperada? Si T es la utilidad por semana, tenemos

$$\begin{aligned} T &= NC_2 - NC_1 \quad \text{si} \quad D > N, \\ &= DC_2 - C_1N - C_3(N - D) \quad \text{si} \quad D \leq N. \end{aligned}$$

Reescribiendo lo anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} T &= N(C_2 - C_1) \quad \text{si} \quad D > N, \\ &= (C_2 + C_3)D - N(C_1 + C_3) \quad \text{si} \quad D \leq N. \end{aligned}$$

Por tanto, la utilidad esperada se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} E(T) &= N(C_2 - C_1)P(D > N) + (C_2 + C_3)\sum_{n=0}^{n} np(n) \\ &\quad - N(C_1 + C_3)P(D \leq N) \\ &= N(C_2 - C_1)\sum_{n=N+1}^{\infty} p(n) + (C_2 + C_3)\sum_{n=0}^{n} np(n) \\ &\quad - N(C_1 + C_3)\sum_{n=0}^{N} p(n) \\ &= N(C_2 - C_1) + (C_2 + C_3)\left[\sum_{n=0}^{N} np(n) - N\sum_{n=0}^{N} p(n)\right] \\ &= N(C_2 - C_1) + (C_2 + C_3)\sum_{n=0}^{N} p(n)(n - N). \end{aligned}$$

Supongamos que se sabe que para D es apropiada la siguiente distribución de probabilidades: $P(D = n) = \frac{1}{5}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Por tanto,

$$E(T) = N(C_2 - C_1) + \frac{(C_2 + C_3)}{5}\left[N(N+1)/2 - N^2\right] \quad \text{si } N \leq 5.$$

$$= N(C_2 + C_1) + (C_2 + C_3)\tfrac{1}{5}(15 - 5N) \quad \text{si } N > 5.$$

Supongamos que $C_2 = \$9$, $C_1 = \$3$ y $C_3 = \$1$. Por tanto,

$$E(T) = 6N + 2\left[\frac{N(N+1)}{2} - N^2\right]$$

$$\text{si } N \leq 5,$$

$$= 6N + 2(15 - 5N) \quad \text{si } N > 5,$$

$$= 7N - N^2 \qquad \text{si } N \leq 5,$$

$$= 30 - 4N \qquad \text{si } N > 5.$$

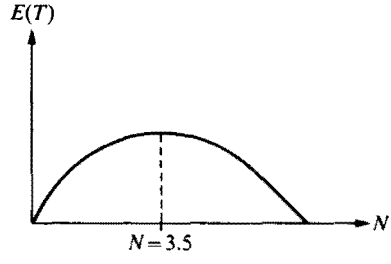


FIGURA 7.5

Por lo tanto el máximo ocurre para $N = 3.5$. (Véase la Fig. 7.5) Para $N = 3$ o 4 tenemos $E(T) = 12$, el cual es el máximo obtenible, puesto que N es un entero.

7.5 La varianza de una variable aleatoria

Supongamos que para una variable aleatoria X encontramos que $E(X)$ es igual a 2. ¿Cuál es la significación de esto? Es preciso que no se atribuya más importancia a esta información que la justificada. Significa sencillamente, que si consideramos un gran número de valores de X,

digamos $x_1, \ldots, x_n$, y los promediamos, este resultado estará cercano a 2 si n es grande. Sin embargo, es crucial no dar mucha relevancia a un valor esperado. Por ejemplo, supóngase que X representa la duración de una bombilla que se recibe de un fabricante, y que $E(X) = 1000$ horas. Esto podría significar una de varias posibilidades. Podría significar que se espera que la mayor parte de las bombillas dure entre 900 y 1100 horas. También podría significar que las bombillas que se entregan son de dos tipos diferentes: alrededor de la mitad son de muy alta calidad y con duración de casi 1300 horas, mientras que la otra mitad son de muy mala calidad y tienen una duración de cerca de 700 horas.

Hay una necesidad obvia de presentar una medida cuantitativa que distinga entre estas situaciones. Varias medidas se sugieren por sí mismas, pero la siguiente es la cantidad usada más comúnmente.

Definición. Sea X una variable aleatoria. Definamos la *varianza* de X, que se denota con $V(X)$ o σ_X^2 como sigue:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 . \tag{7.12}$$

La raíz cuadrada positiva de $V(X)$ se llama *desviación estándar* de X y se designa con σ_X.

Observaciones: a) El número $V(X)$ está expresado en *unidades cuadradas* de X. Esto es, si X se mide en horas, entonces $V(X)$ está expresada en (horas)^2. Esta es una razón para considerar la desviación estándar. Se expresa en las *mismas* unidades que X.

b) Otra medida posible podría haber sido $E|X - E(X)|$. Por diferentes razones, una de las cuales es que X^2 es una función "con mejor comportamiento" que $|X|$, se prefiere la varianza.

c) Si interpretamos a $E(X)$ como el centro de una masa unitaria distribuida sobre una recta, podemos interpretar $V(X)$ como el momento de inercia de esta masa, respecto a un eje perpendicular a través del centro de masa.

d) $V(X)$, como se definió en la ecuación (7.12), es un caso especial del concepto más general siguiente. El *k-ésimo momento* de la variable aleatoria X respecto a su esperanza se define como $\mu_k = E[X - E(X)]^k$. Evidentemente, para $k = 2$ obtenemos la varianza.

El cálculo de $V(X)$ se simplifica con la ayuda del resultado siguiente.

Teorema 7.5.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Demostración: Desarrollando $E[X - E(X)]^2$ y usando las propiedades de la esperanza establecidas previamente, se obtiene

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\ &= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\} \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \end{aligned}$$

[Recuérdese que $E(X)$ es una constante.]

$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

EJEMPLO 7.15. La oficina meteorológica clasifica el tipo de cielo que es visible en relación con los "grados de nubosidad". Se usa una escala de 11 categorías: 0, 1, 2, ..., 10, donde 0 representa un cielo perfectamente claro, 10 representa un cielo completamente cubierto, mientras que los otros valores representan diversas condiciones intermedias. Supongamos que tal clasificación se hace en una estación meteorológica determinada en un día y hora determinados. Sea X la variable aleatoria que toma uno de los 11 valores anteriores. Supongamos que la distribución de probabilidades de X es

$$\begin{aligned} p_0 &= p_{10} = 0.05: \\ p_1 &= p_2 = p_8 = p_9 = 0.15; \\ p_3 &= p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0.06. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(X) = {} & 1(0.15) + 2(0.15) + 3(0.06) + 4(0.06) + 5(0.06) \\ & + 6(0.06) + 7(0.06) + 8(0.15) + 9(0.15) \\ & + 10(0.05) = 5.0. \end{aligned}$$

A fin de calcular $V(X)$ necesitamos evaluar $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) = {} & 1(0.15) + 4(0.15) + 9(0.06) + 16(0.06) + 25(0.06) \\ & + 36(0.06) + 49(0.06) + 64(0.15) + 81(0.15) \\ & + 100(0.05) = 35.6. \end{aligned}$$

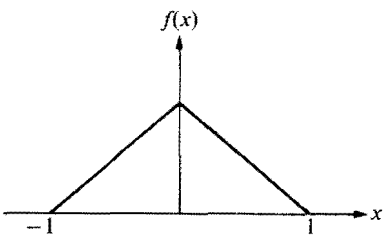


FIGURA 7.6

Luego,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 35.6 - 25 = 10.6,$$

y la desviación estándar $\sigma = 3.25$.

EJEMPLO 7.16. Supongamos que X es una variable aleatoria continua con fdp

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x, \qquad -1 \leq x \leq 0, \\ &= 1 - x, \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

(Véase la Fig. 7.6.) Debido a la simetría de la fdp, $E(X) = 0$. (Véase la siguiente Observación.) Más aún,

$$\begin{aligned} E(X^2) = {} & \int_{-1}^{0} x^2(1 + x)\, dx \\ & + \int_{0}^{1} x^2(1 - x)\, dx = \tfrac{1}{6}. \end{aligned}$$

Por tanto, $V(X) = \frac{1}{6}$.

Observación: Supóngase que una variable aleatoria continua tiene una fdp que es simétrica respecto a $x = 0$. Es decir, $f(-x) = f(x)$ para toda x. Entonces, siempre que exista $E(X)$, $E(X) = 0$, que es una consecuencia inmediata de la definición de $E(X)$. Esto puede extenderse a un punto arbitrario de simetría $x = a$, en tal caso, $E(X) = a$. (Véase el Prob. 7.33.)

7.6 Propiedades de la varianza de una variable aleatoria

Hay varias propiedades importantes, en parte análogas a las expuestas para la esperanza de una variable aleatoria, que se mantienen para la varianza.

Propiedad 7.7. Si C es una constante,

$$V(X + C) = V(X). \tag{7.13}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} V(X + C) &= E[(X + C) - E(X + C)]^2 = E[(X + C) - E(X) - C]^2 \\ &= E[X - E(X)]^2 = V(X). \end{aligned}$$

Observación: Esta propiedad es intuitivamente evidente, porque al agregar una constante a un resultado X no cambia su variabilidad, que es lo que mide la varianza. Sólo "desplaza" los valores de X a la derecha o a la izquierda, dependiendo del signo de C.

Propiedad 7.8. Si C es una constante,

$$V(CX) = C^2V(X). \tag{7,14}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} V(CX) &= E(CX)^2 - (E(CX))^2 = C^2E(X^2) - C^2(E(X))^2 \\ &= C^2\left[E(X^2) - (E(X))^2\right] = C^2V(X). \end{aligned}$$

Propiedad 7.9. Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si X y Y son *independientes*, entonces

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y). \tag{7.15}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

Observación: Es importante establecer que, en general, la varianza *no es aditiva* como lo es el valor esperado. Con la suposición adicional de independencia, la propiedad 7.9 es válida. La varianza no posee la propiedad de linealidad que dimos para la esperanza, es decir, $V(aX+b) \neq aV(X)+b$. En su lugar tenemos $V(aX+b) = a^2V(X)$.

Propiedad 7.10. Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias independientes. Entonces,

$$V(X_1, + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n). \tag{7.16}$$

Demostración: Ésta se deduce de la propiedad 7.9 con inducción matemática.

Propiedad 7.11. Sea X una variable aleatoria con varianza finita. Luego, para cualquier número real α,

$$V(X) = E[(X-\alpha)^2] - [E(X) - \alpha]^2. \tag{7.17}$$

Demostración: Véase el problema 7.36.

Observaciones: a) Ésta es una extensión obvia del teorema 7.5, porque al hacer $\alpha = 0$ obtenemos el teorema 7.5.

b) Si interpretamos $V(X)$ como el momento de inercia y $E(X)$ como el centro de una masa unitaria, entonces la propiedad anterior es una formulación del teorema, muy conocido en mecánica, de los *ejes paralelos*: el momento de inercia respecto a un punto arbitrario es igual al momento de inercia respecto al centro de la masa más el cuadrado de la distancia de este punto arbitrario al centro de la masa.

c) $E[X-\alpha]^2$ es minimizado si $\alpha = E(X)$. Esto se deduce de inmediato de la propiedad anterior. Así, el momento de inercia (de una masa unitaria

distribuida en una recta) respecto a un eje que pasa por un punto arbitrario se minimiza si este punto se escoge como el centro de masa.

EJEMPLO 7.17. Calculemos la varianza de una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p.

Para calcular $V(X)$ podemos proceder de dos maneras. Puesto que ya conocemos que $E(X) = np$, sencillamente debemos calcular $E(X^2)$ y luego evaluar $V(X)$ como $E(X^2) - (E(X))^2$. Para calcular $E(X^2)$ usamos el hecho de que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Por tanto, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Esta suma puede calcularse fácilmente, pero en vez de hacer esto, se empleará un método simple.

Nuevamente usaremos la representación de X que se presentó en el ejemplo 7.13, a saber, $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$. Observemos que las Y_i son variables aleatorias *independientes*, puesto que el valor de Y_i depende sólo del resultado de la i-ésima repetición, y se supone que las repeticiones sucesivas son independientes. Por tanto, podemos aplicar la propiedad 7.10 y obtener

$$V(X) = V(Y_1 + \cdots + Y_n) = V(Y_1) + \cdots + V(Y_n).$$

Pero $V(Y_i) = E(Y_i)^2 - [E(Y_i)]^2$. Ahora

$$E(Y_i) = 1(p) + 0(1-p) = p, \quad E(Y_i)^2 = 1^2(p) + 0^2(1-p) = p.$$

Por tanto,

$$V(Y_i) = p - p^2 = p(1-p) \text{ para toda } i. \text{ Así, } V(X) = np(1-p).$$

Observación: Consideremos $V(X) = np(1-p)$ como una función de p para una n dada. Dibujemos una gráfica como se muestra en la figura 7.7.

Resolviendo $(d/dp)np(1-p) = 0$ encontramos que el valor máximo para V(X) ocurre cuando $p = \frac{1}{2}$. El valor mínimo de $V(X)$ ocurre desde luego en los extremos del intervalo en $p = 0$ y $p = 1$. Esto es intuitivamente como debería ser. Recordando que la varianza es una medida de la variación de la variable aleatoria X definida como el número de veces que ocurre el evento A en n repeticio-

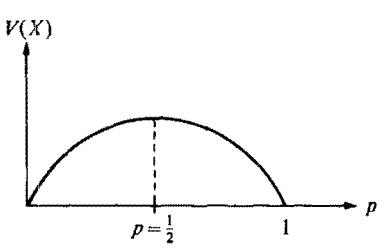


FIGURA 7.7

nes, encontramos que esta variación es nula
si $p = 0$ o 1 (es decir, si A ocurre con probabilidad 0 o 1) y es máxima cuando estamos tan "inciertos como podemos" acerca de la ocurrencia o no ocurrencia de A, es decir, cuando $P(A) = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 7.18. Supóngase que la variable aleatoria X está distribuida uniformemente en $[a, b]$. Como lo calculamos previamente, $E(X) = (a + b)/2$.

Para calcular $V(X)$ hallemos el valor de $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.$$

Por tanto,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

después de un cálculo sencillo.

Observaciones: a) Este resultado es intuitivamente significativo. Indica que la varianza de X no depende de manera individual de a y b sino sólo de $(b-a)^2$, es decir, del cuadrado de su *diferencia*. Por tanto, dos variables aleatorias distribuidas, cada una uniformemente, en un intervalo (no necesariamente el mismo) tendrán iguales varianzas, mientras las *longitudes* de los intervalos sean iguales.

b) Es bien conocido el hecho de que el momento de inercia de una barra delgada de masa M y longitud L respecto a un eje transversal que pasa por el centro está dado por $ML^2/12$.

7.7 Expresiones aproximadas para la esperanza y la varianza

Ya hemos observado que para evaluar $E(Y)$ o $V(Y)$, donde $Y = H(X)$, no necesitamos conocer la distribución de probabilidades de Y, sino que podemos trabajar directamente con la distribución de probabilidades de X. De modo semejante, si $Z = H(X, Y)$, podemos calcular $E(Z)$ y $V(Z)$ sin obtener primero la distribución de Z.

Si la función H es muy complicada, la evaluación de la esperanza y varianza anteriores puede conducir a integraciones (o sumas) que son muy difíciles. De aquí que sean muy útiles las aproximaciones siguientes.

Teorema 7.6. Sea una variable aleatoria X con $E(X) = \mu$, y $V(X) = \sigma^2$. Supongamos que $Y = H(X)$. Luego,

$$E(Y) \simeq H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2, \tag{7.18}$$

$$V(Y) \simeq \left[H'(\mu)\right]^2 \sigma^2. \tag{7.19}$$

(Para hacer útiles las aproximaciones anteriores, necesitamos evidentemente que H sea a lo menos diferenciable dos veces para $x = \mu$.)

Demostración (sólo un bosquejo): A fin de establecer la ecuación (7.18), desarrollemos la función H en una serie de Taylor para $x = \mu$ con dos términos. Así

$$Y = H(\mu) + (X - \mu)H'(\mu) + \frac{(X - \mu)^2 H''(\mu)}{2} + R_1,$$

donde R_1 es un resto. Si descartamos el término resto R_1, entonces, tomando el valor esperado en ambos miembros, tenemos

$$E(Y) \simeq H(\mu) + \frac{H''(\mu)}{2}\sigma^2,$$

puesto que $E(X - \mu) = 0$. Para establecer la ecuación (7.19), desarrollemos H en una serie de Taylor para $x = \mu$ con un término. Luego, $Y = H(\mu) + (X - \mu)H'(\mu) + R_2$. Si desechamos el resto R_2 y tomamos la varianza en ambos lados, tenemos

$$V(Y) \simeq \left[H'(\mu)\right]^2 \sigma^2.$$

EJEMPLO 7.19. En ciertas condiciones, la tensión superficial de un líquido (en dina/cm) está dada por la fórmula $S = 2(1 - 0.005T)^{1.2}$, donde T es la temperatura del líquido (en grados centígrados).

Supongamos que T es una variable aleatoria continua con la siguiente fdp,

$$f(t) = 3000t^{-4}, \quad t \geq 10,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Luego,

$$E(T) = \int_{10}^{\infty} 3000t^{-3}\ dt = 15 \text{ (grados centígrados)}.$$

Y

$$\begin{aligned} V(T) &= E(T^2) - (15)^2 \\ &= \int_{10}^{\infty} 3000t^{-2}\ dt - 225 = 75 \text{ (grados centígrados)}^2. \end{aligned}$$

Para calcular $E(S)$ y $V(S)$ tenemos que evaluar las integrales siguientes:

$$\int_{10}^{\infty} (1 - 0.005t)^{1.2} t^{-4}\ dt$$

Y

$$\int_{10}^{\infty} (1 - 0.005t)^{2.4} t^{-4}\ dt\,.$$

En vez de evaluar esas expresiones, obtendremos aproximaciones para $E(S)$ y $V(S)$ al usar las ecuaciones (7.18) y (7.19). Para usar esas fórmulas tenemos que calcular $H'(15)$ y $H''(15)$, donde $H(t) = 2(1 - 0.005t)^{1.2}$. Tenemos

$$H'(t) = 2.4(1 - 0.005t)^{0.2}(-0.005) = -0.012(1 - 0.005t)^{0.2}.$$

Luego,

$$H(15) = 1.82,\ H'(15) = 0.01.$$

De modo semejante,

$$H''(t) = -0.0024(1 - 0.005t)^{-0.8}(-0.005) = 0.000012(1 - 0.005t)^{-0.8}.$$

Por lo tanto,

$$H''(15) = \frac{0.000012}{(0.925)^{0.8}} = 0^{+}.$$

Así tenemos

$$E(S) \simeq H(15) + 75H''(15) = 1.82 \text{ (dinas/cm)},$$
$$V(S) \simeq 75\left[H''(15)\right]^2 = 0.87 \text{ (dinas/cm)}^2.$$

Si Z es una función de dos variables aleatorias, $Z = H(X,Y)$, se establece un resultado análogo.

Teorema 7.7. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Supongamos que $E(X) = \mu_x$, $E(Y) = \mu_y$; $V(X) = \sigma_x^2$ y $V(Y) = \sigma_y^2$. Sea $Z = H(X,Y)$. [Supondremos que existen las diversas derivadas de H para (μ_x, μ_y).] Luego, si X y Y son independientes, tenemos

$$E(Z) \simeq H(\mu_x, \mu_y) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\sigma_x^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\sigma_y^2\right],$$
$$V(Z) \simeq \left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]^2 \sigma_x^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial y}\right]^2 \sigma_y^2,$$

donde todas las derivadas parciales se evalúan en (μ_x, μ_y).

Demostración: La demostración implica el desarrollo de H en una serie de Taylor en el punto (μ_x, μ_y) con uno y dos términos, desechando el resto, y luego tomando la esperanza y la varianza en ambos miembros como se hizo en la demostración del teorema 7.6. Dejamos los detalles al lector. (Si X y Y no son independientes, se puede derivar una fórmula ligeramente más complicada.)

Observación: El resultado anterior puede extenderse a una función de n variables aleatorias independientes, esto es $Z = H(X_1, \ldots, X_n)$. Si $E(X_i) = \mu_i, V(X_i) = \sigma_i^2$, tenemos las siguientes aproximaciones, suponiendo que todas las derivadas existan:

$$E(Z) \simeq H(\mu_1, \ldots, \mu_n) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}\sigma_i^2,$$
$$V(Z) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2,$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en el punto $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

EJEMPLO 7.20. Supóngase que tenemos un circuito simple para el cual el voltaje, M, se expresa por la ley de Ohm como $M = IR$, donde I y R son la corriente y la resistencia del circuito, respectivamente. Si I y R son variables aleatorias independientes, entonces M es una variable aleatoria y, usando el teorema 7.7, podemos escribir

$$E[M] \simeq E(I)E(R), \quad V[M] \simeq [E(R)]^2 V(I) + [E(I)]^2 V(R).$$

7.8 Desigualdad de Chebyshev

Existe una desigualdad muy conocida del matemático ruso Chebyshev que desempeña una función importante en lo que resta de nuestra obra. Además, nos dará un medio para comprender con precisión como la varianza mide la variabilidad respecto al valor esperado de una variable aleatoria.

Si conocemos la distribución de probabilidades de una variable aleatoria X (la fdp en el caso continuo o la probabilidad puntual en el caso discreto), podemos calcular $E(X)$ y $V(X)$, si existen. Sin embargo, lo recíproco *no* es verdadero. Esto es, conociendo $E(X)$ y $V(X)$ no podemos reconstruir la distribución de probabilidades de X y, por tanto, no podemos calcular cantidades tales como $P[|X - E(X)| \leq C]$. Sin embargo, resulta que aunque no podemos evaluar tales probabilidades [a partir de un conocimiento de $E(X)$ y $V(X)$], es posible dar una cota superior (o inferior) muy útil para tales probabilidades. Este resultado está contenido en lo que se conoce como la desigualdad de Chebyshev.

Desigualdad de Chebyshev. Sea X una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y sea c un número real cualquiera. Entonces, si $E(X - c)^2$ es finita y ε es cualquier número positivo, tenemos

$$P[|X - c| \geq \epsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(X - c)^2. \tag{7.20}$$

Las formas siguientes, equivalentes a (7.20), son inmediatas:

a) Al considerar el evento complementario obtenemos:

$$P[|X - c| < \epsilon] \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} E(X - c)^2. \tag{7.20a}$$

b) Al elegir $c = \mu$ obtenemos

$$P[|X-\mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var } X}{\epsilon^2}. \tag{7.20b}$$

c) Al elegir $c = \mu$ y $\varepsilon = k\sigma$, donde $\sigma^2 = \text{Var } X > 0$, obtenemos

$$P[|X-\mu| \geq k\sigma] \leq k^{-2}. \tag{7.21}$$

Esta última forma (7.21) indica especialmente cómo la varianza mide el "grado de concentración" de la probabilidad próxima a $E(X) = \mu$.

Demostración (Demostraremos sólo 7.20, puesto que las otras se deducen como se indicó. Trataremos únicamente el caso continuo. En el caso discreto, el argumento es muy parecido al de las integrales sustituidas por sumas. Sin embargo, hay que tener cuidado con los puntos extremos de los intervalos.):

Consideremos

$$P[|X-c| \geq \varepsilon] = \int_{x:|x-c|\geq\varepsilon} f(x)\, dx\,.$$

(Los límites de la integral dicen que estamos integrando entre $-\infty$ y $c-\varepsilon$ y entre $c+\varepsilon$ y $+\infty$.)

Ahora, $|x-c| \geq \varepsilon$ equivale a $(x-c)^2/\varepsilon^2 \geq 1$. Por tanto, la integral anterior es

$$\leq \int_R \frac{(x-c)^2}{\epsilon^2} f(x)\, dx,$$

donde

$$R = \{x : |x-c| \geq \varepsilon\}.$$

Esta integral, a su vez, es

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-c)^2}{\epsilon^2} f(x)\, dx$$

lo que es igual a

$$\frac{1}{\varepsilon^2} E[X-c]^2,$$

como queríamos demostrar.

Observaciones: a) Es importante darse cuenta de que el resultado anterior es notable debido a lo poco que se presupone acerca de la conducta probabilística de la variable aleatoria X.

b) Como podríamos sospechar, una información adicional respecto a la distribución de la variable aleatoria X nos permitirá mejorar la desigualdad que deducimos. Por ejemplo, si $C = \frac{3}{2}$, tenemos, de la desigualdad de Chebyshev,

$$P\left[|X - \mu| \geq \tfrac{3}{2}\sigma\right] \leq \tfrac{4}{9} = 0.44.$$

Supongamos que también *sabemos* que X está distribuida uniformemente en $(1 - 1/\sqrt{3}, 1 + 1/\sqrt{3})$. Por lo tanto, $E(X) = 1$, $V(X) = \frac{1}{9}$ y así

$$P\left[|X - \mu| \geq \tfrac{3}{2}\sigma\right] = P\left[|X - 1| \geq \tfrac{1}{2}\right] = 1 - P\left[|X - 1| < \tfrac{1}{2}\right]$$
$$= 1 - P\left[\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{2}\right] = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.134.$$

Nótese que aunque la afirmación obtenida de la desigualdad de Chebyshev es consistente con este resultado, la última es una relación más precisa. Sin embargo, en muchos problemas ninguna suposición referente a la distribución específica de la variable aleatoria está justificada, y en tales casos, la desigualdad de Chebyshev puede darnos una información importante acerca del comportamiento de la variable aleatoria.

Como lo observamos en la ecuación (7.21), si $V(X)$ es pequeña, la mayor parte de la distribución de probabilidades de X está "concentrada" próxima a $E(X)$. Esto se puede expresar con más detalle en el teorema siguiente.

Teorema 7.8. Supongamos que $V(X) = 0$. Luego, $P[X = \mu] = 1$, donde $\mu = E(X)$. (Informalmente, $X = \mu$, con "probabilidad 1".)

Demostración: De la ecuación (7.20b) encontramos que

$$P[|X - \mu| \geq \epsilon] = 0 \text{ para cualquier } \varepsilon > 0.$$

Luego,

$$P[|X - \mu| < \varepsilon] = 1 \text{ para cualquier } \varepsilon > 0.$$

Puesto que ε puede elegirse arbitrariamente pequeña, el teorema queda demostrado.

Observaciones: a) Este teorema demuestra que la varianza cero implica que toda la probabilidad está concentrada en un solo punto, a saber $E(X)$.

b) Si $E(X) = 0$, entonces $V(X) = E(X^2)$ y, por tanto, en este caso, $E(X^2) = 0$ implica la misma conclusión.

c) En el sentido anterior decimos que una variable aleatoria X es *degenerada*: toma sólo un valor con probabilidad 1.

7.9 El coeficiente de correlación

Hasta ahora nos hemos interesado en asociar parámetros como $E(X)$ y $V(X)$ con la distribución de variables aleatorias unidimensionales. Estos parámetros miden, en el sentido antes descrito, ciertas características de la distribución. Si tenemos una variable aleatoria bidimensional (X, Y), se encuentra un problema análogo. Por supuesto, podemos presentar nuevamente las variables aleatorias unidimensionales X y Y asociadas con (X, Y). Sin embargo, surge la pregunta de si hay un parámetro significativo que mida de alguna manera el "grado de asociación" entre X y Y. Ésta es una noción vaga que se precisará más adelante. Demos la siguiente definición formal.

Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Definimos ρ_{xy}, el *coeficiente de correlación* entre X y Y, como sigue:

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{V(X)V(Y)}}. \tag{7.22}$$

Observaciones: a) Suponemos que todas las esperanzas existen y que $V(X)$ y $V(Y)$ son distintas de cero. Cuando no hay duda de cuáles variables aleatorias están implicadas escribiremos simplemente p en vez de ρ_{xy}.

b) El numerador de ρ, $E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$, se llama *covarianza* de X y Y, y algunas veces se denota con σ_{xy}.

c) El coeficiente de correlación es una cantidad adimensional.

d) Antes de que la definición anterior pueda ser significativa, debemos establecer exactamente lo que mide ρ. Esto lo haremos al considerar un número de propiedades ρ.

Teorema 7.9.

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}.$$

Demostración: Consideremos

$$\begin{aligned} E\{[X - E(X)]\,[Y - E(Y)]\} &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Teorema 7.10. Si X y Y son independientes, entonces $\rho = 0$.

Demostración: Se deduce inmediatamente del teorema 7.9, puesto que

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

si X y Y son independientes.

Observación: El recíproco del teorema 7.10 *no* es verdadero en general. (Véase el Prob. 7.39.) Esto es, podemos tener $\rho = 0$, y aun así X y Y no necesitan ser independientes. Si $\rho = 0$ decimos que X y Y son *no correlacionados*. Así, siendo no correlacionados e independientes no son, en general, equivalentes. El ejemplo siguiente ilustra este punto.*

Sean X y Y variables aleatorias cualesquiera con la *misma* distribución y $U = X - Y$ y $V = X + Y$. Luego, $E(U) = 0$ y $\text{cov}(U, V) = E[(X - Y)(X + Y)] = E(X^2 - Y^2) = 0$. Entonces, U y V son no correlacionadas. Aun si X y Y son independientes, U y V pueden ser dependientes, como lo indica la elección siguiente de X y Y. Sean X y Y los números que aparecen respectivamente en el primero y segundo dados, cuando se han lanzado un par de dados regulares. Ahora, por ejemplo, hallamos que $P[V = 4 \mid U = 3] = 0$ (puesto que si $X - Y = 3$, $X + Y$ no puede ser igual a 4), mientras que $P(V = 4) = 3/36$. Así, U y V son dependientes.

Teorema 7.11. $-1 \leq \rho \leq 1$. (Esto es, ρ toma los valores entre -1 y $+1$ inclusive.)

---

* El ejemplo de esta Observación está tomado de un análisis del artículo titulado "Mutually Exclusive Events, Independence and Zero Correlation", por J. D. Gibbons, que se publicó en *The American Statistician*, 22, núm. 5, diciembre de 1968, págs. 31–32.

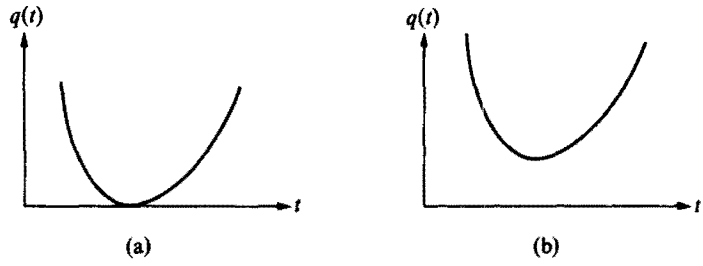


FIGURA 7.8

Demostración: Consideremos la siguiente función de la variable real t:

$$q(t) = E[V + tW]^2,$$

donde $V = X - E(X)$ y $W = Y - E(Y)$. Puesto que $[V + tW]^2 \geq 0$, tenemos que $q(t) \geq 0$ para toda t. Desarrollando obtenemos

$$q(t) = E\left[V^2 + 2tVW + t^2W^2\right] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2).$$

Así, $q(t)$ es una expresión cuadrática en t. En general, si una expresión cuadrática $q(t) = at^2 + bt + c$ tiene la propiedad de que $q(t) \geq 0$ para toda t, significa que su gráfica corta el eje t en un solo punto o en ninguno, como se indica en la figura 7.8. Esto, a su vez, indica que su discriminante $b^2 - 4ac$ debe ser ≤ 0, puesto que $b^2 - 4ac > 0$ significaría que $q(t)$ tiene *dos* raíces reales *distintas*. Aplicando esta conclusión a la función $q(t)$ que consideramos anteriormente, obtenemos

$$4[E(VW)]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leq 0.$$

Esto implica que

$$\frac{[E(VW)]^2}{E(V^2)E(W^2)} \leq 1$$

y, por tanto,

$$\frac{\{E[X - E(X)][Y - E(Y)]\}^2}{V(X)V(Y)} = \rho^2 \leq 1.$$

Así, $-1 \leq \rho \leq 1$.

Teorema 7.12. Supongamos que $\rho^2 = 1$. Luego (con probabilidad 1 en el sentido del teorema 7.8), $Y = AX + B$, donde A y B son constantes. En palabras, si el coeficiente de correlación ρ es ± 1, entonces Y es una función lineal de X (con probabilidad 1).

Demostración: Consideremos nuevamente la función $q(t)$ descrita en la demostración del teorema 7.11. Es sencillo observar en la demostración de ese teorema que si $q(t) > 0$ para *toda* t, entonces $\rho^2 < 1$. Luego la hipótesis del presente teorema, a saber, $\rho^2 = 1$, implica que debe existir al menos un valor de t, digamos t_0, tal que $q(t_0) = E(V + t_0W)^2 = 0$. Puesto que $V + t_0W = [X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)]$, tenemos que $E(V + t_0W) = 0$ y, por tanto, la varianza de $(V + t_0W) = E(V + t_0W)^2$. Así encontramos que la hipótesis del teorema 7.12 conduce a la conclusión de que la varianza de $(V + t_0W) = 0$. Por tanto, del teorema 7.8 podemos concluir que la variable aleatoria $(V + t_0W) = 0$ (con probabilidad 1). Por tanto, $[X - E(X)] + t_0[Y - E(Y)] = 0$. Reescribiendo, encontramos que $Y = AX + B$ (con probabilidad 1), como se iba a demostrar.

Observaciones: El recíproco del teorema 7.12 también se cumple como se demuestra en el teorema 7.13.

Teorema 7.13. Supongamos que X y Y son dos variables aleatorias para las cuales $Y = AX + B$, donde A y B son constantes. Entonces, $\rho^2 = 1$. Si $A > 0$, $\rho = +1$; si $A < 0$, $\rho = -1$.

Demostración: Puesto que $Y = AX + B$, tenemos que $E(Y) = AE(X) + B$ y $V(Y) = A^2V(X)$.
También

$$E(XY) = E[X(AX + B)] = AE(X^2) + BE(X).$$

Luego,

$$\rho^2 = \frac{[E(XY) - E(X)E(Y)]^2}{V(X)V(Y)}$$

$$= \frac{\left\{AE(X^2) + BE(X) - E(X)[AE(X) + B]\right\}^2}{V(X)A^2V(X)}$$

$$= \frac{\left[AE(X^2) + BE(X) - A(E(X))^2 - BE(X)\right]^2}{A^2(V(X))^2}$$

$$= \frac{A^2\left\{E(X^2) - [E(X)]^2\right\}^2}{A^2(V(X))^2} = 1.$$

(La segunda afirmación del teorema se deduce al observar que $\sqrt{A^2} = |A|$.)

Observación: Los teoremas 7.12 y 7.13 establecen las siguientes características importantes del coeficiente de correlación: el coeficiente de correlación es una medida del *grado de linealidad* entre X y Y. Los valores de ρ próximos a +1 o -1 indican un alto grado de linealidad, mientras que los valores de ρ próximos a 0 indican una ausencia de tal linealidad. Los valores positivos de ρ muestran que Y tiende a aumentar con valores crecientes de X, mientras que los valores negativos de ρ muestran que Y tiende a disminuir con valores crecientes de X. Existe una considerable confusión acerca de la interpretación del coeficiente de correlación. Un valor de ρ cercano a cero sólo indica la ausencia de una relación *lineal* entre X y Y. No impide la posibilidad de alguna relación *no lineal*.

EJEMPLO 7.21. Supongamos que la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está distribuida uniformemente en la región triangular

$$R = \{(x, y) \mid 0 < x < y < 1\}.$$

(Véase la Fig. 7.9.) Luego, la fdp está dada como

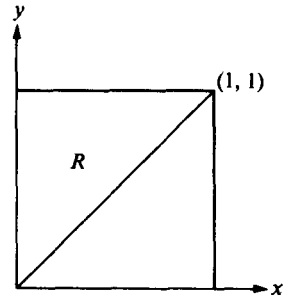


FIGURA 7.9

$$f(x, y) = 2, \quad (x, y) \in R,$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Entonces, las fdp marginales de X y Y son

$$g(x) = \int_x^1 (2)\, dy = 2(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$h(y) = \int_0^y (2)\, dx = 2y, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Por tanto,

$$E(X) = \int_0^1 x2(1-x)\ dx = \tfrac{1}{3}, \qquad E(Y) = \int_0^1 y2y\ dy = \tfrac{2}{3};$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 2(1-x)\ dx = \tfrac{1}{6}, \qquad E(Y^2) = \int_0^1 y^2 2y\ dy = \tfrac{1}{2};$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \tfrac{1}{18}, \qquad V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \tfrac{1}{18};$$

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^y xy2\ dx\ dy = \tfrac{1}{4}.$$

Luego,

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{1}{2}$$

Tal como hemos indicado, el coeficiente de correlación es una cantidad adimensional. Su valor no se afecta por un cambio de escala. Se puede demostrar el siguiente teorema fácilmente. (Véase el Prob. 7.41.)

Teorema 7.14. Si ρ_{xy} es el coeficiente de correlación entre X y Y, y si $V = AX + B$ y $W = CY + D$, donde A, B, C y D son constantes, entonces $\rho_{vw} = (AC/|AC|)\rho_{xy}$. (Suponemos que $A \neq 0$, $C \neq 0$.)

7.10 Esperanza condicional

Tal como definimos el valor esperado de una variable aleatoria X (en términos de su distribución de probabilidades) como $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ o $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$, así podemos definir la esperanza condicional de una variable aleatoria (en términos de su distribución condicional de probabilidades) como sigue.

Definición. *a*) Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua, definimos la *esperanza condicional* de X para $Y = y$ como

$$E(X \mid y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x \mid y)\ dx. \tag{7.23}$$

b) Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, definimos la esperanza condicional de X para $Y = y_j$ como

$$E(X \mid y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i \mid y_j). \tag{7.24}$$

La esperanza condicional de Y para X se define análogamente.

Observaciones: a) La interpretación de la esperanza condicional es como sigue. Puesto que $g(x \mid y)$ representa la fdp condicional de X para $Y = y$, $E(X \mid y)$ es la esperanza de X condicionada al evento $\{Y = y\}$. Por ejemplo, si (X, Y) representa la resistencia a la tensión y la dureza de una muestra de acero, entonces $E(X \mid y = 52.7)$ es la resistencia esperada a la tensión de una muestra de acero elegida al azar del universo de muestras cuya dureza (medida en la escala Rockwell) es 52.7.

b) Es importante darse cuenta de que en general $E(X \mid y)$ es una función de y y, por lo tanto, es una *variable aleatoria*. De manera similar, $E(Y \mid x)$ es una función de x y también es una variable aleatoria. [Estrictamente hablando, $E(X \mid y)$ es el *valor* de la variable aleatoria $E(X \mid Y)$.]

c) Puesto que $E(Y \mid X)$ y $E(X \mid Y)$ son variables aleatorias tiene sentido hablar de sus esperanzas. Así podemos considerar $E[E(X \mid Y)]$, por ejemplo. Es importante reconocer que la esperanza interna se toma respecto a la distribución condicional de X, dado que Y es igual a y, mientras que la esperanza exterior se toma respecto a la distribución de probabilidades de Y.

Teorema 7.15.

$$E[E(X \mid Y)] = E(X), \tag{7.25}$$

$$E[E(Y \mid X)] = E(Y), \tag{7.26}$$

Demostración: (caso continuo solamente): Por definición,

$$E(X \mid y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x \mid y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x, y)}{h(y)}\, dx.$$

donde f es la fdp conjunta de (X, Y) y h es la fdp marginal de Y. Por tanto,

$$E[E(X \mid Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \mid y) h(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{f(x, y)}{h(y)}\, dx \right] h(y)\, dy.$$

Si todas las esperanzas existen, es posible escribir la integral iterada anterior con el orden de integración invertido. Así,

$$E[E(X \mid Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x g(x)\, dx\, E(X).$$

[Se puede usar un argumento semejante para establecer la ecuación (7.26).] Este teorema es muy útil como lo ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7.22. Supóngase que varios cargamentos que traen diverso número de repuestos llegan diariamente. Si N es el número de artículos en el cargamento, la distribución de probabilidades de la variable aleatoria N está dada como sigue:

n:	10	11	12	13	14	15
$P(N = n)$:	0.05	0.10	0.10	0.20	0.35	0.20

La probabilidad de que cualquier repuesto particular sea defectuoso es la misma para todos los repuestos y es igual a 0.10. Si X es el número de repuestos defectuosos que llegan cada día, ¿cuál es el valor esperado de X? Para N *dada* igual a n, X tiene una distribución binomial. Puesto que la misma N es una variable aleatoria, procedemos como sigue.

Tenemos que $E(X) = E[E(X \mid N)]$. Sin embargo, $E(X \mid N) = 0.10\,N$, puesto que para una N dada, X tiene una distribución binomial. Luego,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(0.10N) = 0.10E(N) \\ &= 0.10[10(0.05) + 11(0.10) + 12(0.10) + 13(0.20) + 14(0.35) + 15(0.20)] \\ &= 1.33. \end{aligned}$$

Teorema 7.16. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes. Entonces,

$$E(X \mid Y) + E(X) \quad \text{y} \quad E(Y \mid X) = E(Y)$$

Demostración: Véase el problema 7.43.

EJEMPLO 7.23. Supóngase que el suministro de potencia (en kilowatts) de una compañía hidroeléctrica durante un periodo de tiempo específico es una variable aleatoria X, la que supondremos que tiene

una distribución uniforme en [10, 30]. La demanda de potencia (en kilowatts), digamos Y, también es una variable aleatoria que supondremos que está distribuida uniformemente en [10, 20]. (Luego, en promedio, se suministra más potencia que la que se pide, puesto que $E(X) = 20$, mientras que $E(Y) = 15$.) Por cada kilowatt suministrado, la compañía obtiene una utilidad de \$0.03. Si la demanda excede el suministro, la compañía obtiene una potencia adicional de otra fuente y obtiene una utilidad con esta potencia de \$0.01 por kilowatt suministrado. ¿Cuál es la utilidad esperada durante el tiempo específico que se considera?

Sea T esta utilidad. Tenemos

$$\begin{aligned} T &= 0.03Y \quad \text{si} \quad Y < X, \\ &= 0.03X + 0.01(Y - X) \quad \text{si} \quad Y > X. \end{aligned}$$

Para evaluar $E(T)$ escribámosla como $E[E(T \mid X)]$. Tenemos

$$\begin{aligned} E(T \mid x) &= \begin{cases} \int_{10}^{x} 0.03y\frac{1}{10}\,dy + \int_{x}^{20}(0.01y + 0.02x)\frac{1}{10}\,dy \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } 10 < x < 20, \\ \int_{10}^{20} 0.03y\frac{1}{10}\,dy \quad \text{si } 20 < x < 30, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{10}\left[0.015x^2 - 1.5 + 2 + 0.4x - 0.005x^2 - 0.02x^2\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } 10 < x < 20, \\ \frac{9}{20} \quad \text{si } 20 < x < 30, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.05 + 0.04x - 0.001x^2 \quad \text{si } 10 < x < 20, \\ 0.45 \quad \text{si } 20 < x < 30. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E[E(T \mid X)] = \tfrac{1}{20}\int_{10}^{20}(0.05 + 0.04x - 0.001x^2)\,dx + \tfrac{1}{20}\int_{20}^{30} 0.45\,dx = \$0.43.$$

7.11 Regresión del promedio

Como señalamos en la sección anterior, $E(X \mid y)$ es el valor de la variable aleatoria $E(X \mid Y)$ y es una *función de* y. La gráfica de esta función de y se conoce como *curva de regresión* (del promedio) de X sobre Y. Análogamente, la gráfica de la función de x, $E(Y \mid x)$ se llama curva de regresión (del promedio) de Y sobre X. Para cada una de las y fijas, $E(X \mid y)$ es el valor esperado de la variable aleatoria (unidimensional)

cuya distribución de probabilidades está definida por la ecuación (6.5) o (6.7). (Véase la Fig. 7.10.) En general, el valor esperado dependerá de y. [Se pueden hacer interpretaciones análogas para $E(Y \mid x)$.]

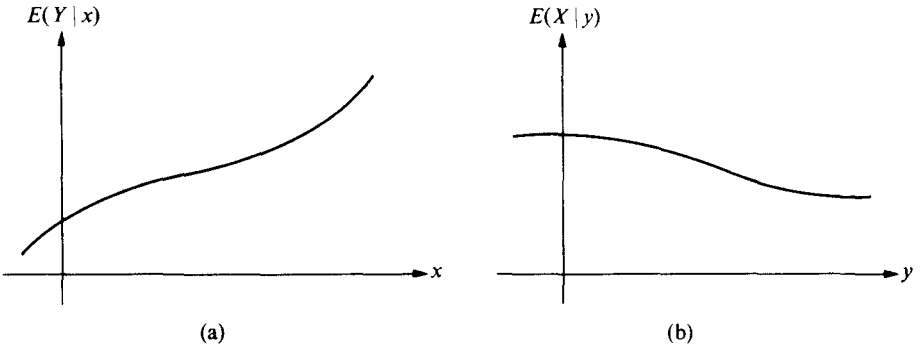


FIGURA 7.10

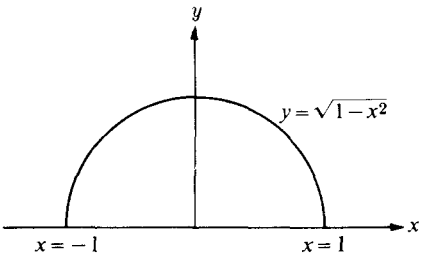


FIGURA 7.11

EJEMPLO 7.24. Supongamos que (X, Y) está distribuida uniformemente en la semicircunferencia indicada en la figura 7.11. Luego, $f(x, y) = 2/\pi$, $(x, y) \in$ semicircunferencia. Así,

$$g(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, \quad -1 \le x \le 1;$$

$$h(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\, dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2}, \quad 0 \le y \le 1.$$

Por tanto,

$$g(x \mid y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2};$$

$$h(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}.$$

Luego,

$$E(Y \mid x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} yh(y \mid x)\, dy$$
$$= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}.$$

De modo semejante

$$E(X \mid y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} xg(x \mid y)\, dx$$
$$= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} x \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}$$
$$= 0.$$

Puede suceder que una o ambas curvas de regresión sean en realidad líneas rectas (Fig. 7.12). Es decir, $E(Y \mid x)$ puede ser una función *lineal* de x o $E(X \mid y)$ puede ser función lineal de y, o pueden suceder ambas cosas. En este caso, decimos que la regresión del promedio de Y sobre X (por ejemplo) es lineal.

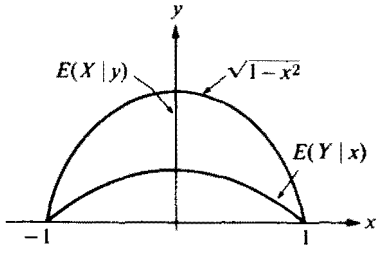


FIGURA 7.12

EJEMPLO 7.25. Supongamos que (X, Y) está distribuida uniformemente en el triángulo indicado en la figura 7.13. Entonces $f(x, y) = 1$, $(x, y) \in T$. Las expresiones siguientes para las fdp marginal y condicional se verifican con facilidad:

$$g(x) = 2x, \quad 0 \le x \le 1; \qquad h(y) = \frac{2-y}{2}, \quad 0 \le y \le 2.$$

$$g(x \mid y) = \frac{2}{2-y}, \quad y/2 \le x \le 1; \quad h(y \mid x) = \frac{1}{2x}, \quad 0 \le y \le 2x.$$

Así, $E(Y \mid x) = \int_0^{2x} yh(y \mid x)\, dy = \int_0^{2x} y(1/2x)\, dy = x$. De modo semejante,

$$E(X \mid y) = \int_{y/2}^{1} xg(x \mid y)\, dx = \int_{y/2}^{1} x\frac{2}{2-y}\, dx = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}.$$

Así, *ambas* regresiones de Y sobre X y de X sobre Y son lineales (Fig. 7.14).

Resulta que *si* la regresión del promedio de Y sobre X es lineal, por ejemplo $E(Y \mid x) = \alpha x + \beta$, podemos expresar fácilmente los coeficientes α y β en términos de ciertos parámetros de la distribución conjunta de (X, Y). Tenemos el teorema siguiente.

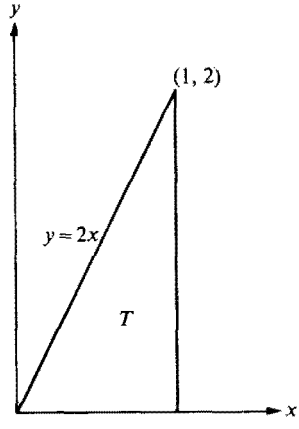


FIGURA 7.13

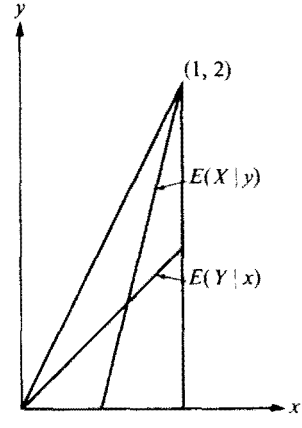


FIGURA 7.14

Teorema 7.17. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional y supongamos que

$$E(X) = \mu_x, \quad E(Y) = \mu_y, \quad V(X) = \sigma_x^2 \quad \text{y} \quad V(Y) = \sigma_y^2.$$

Sea ρ el coeficiente de correlación entre X y Y. *Si* la regresión de Y sobre X es lineal, tenemos

$$E(Y \mid x) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x). \tag{7.27}$$

Si la regresión de X sobre Y es lineal, tenemos

$$E(X \mid y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y). \tag{7.28}$$

Demostración: La demostración de este teorema se bosqueja en el problema 7.44.

Observaciones: a) Como se sugirió en la exposición anterior, es posible que *una* de las regresiones del promedio sea lineal mientras que la otra no lo sea.

b) Nótese el importante papel que desempeña el coeficiente de correlación en las expresiones anteriores. Si la regresión de X sobre Y, por ejemplo, es lineal, y si $\rho = 0$, entonces encontramos nuevamente que $E(X \mid y)$ no depende de y. Nótese también que el signo algebraico de ρ determina el signo de la pendiente de regresión.

c) Si ambas funciones de regresión son lineales, encontramos al resolver las ecuaciones (7.27) y (7.28) simultáneamente, que las rectas de regresión se cortan en el "centro" de la distribución, (μ_x, μ_y).

Como lo hemos observado (en el caso del ejemplo 7.23), las funciones de regresión no necesitan ser lineales. Sin embargo, aún nos podría interesar tratar de *aproximar* la curva de regresión con una función lineal. Usualmente se hace recurriendo al *principio de los mínimos cuadrados*, lo que en el contexto presente es como sigue: se escogen las constantes a y b de modo que $E[E(Y \mid X) - (aX + b)]^2$ se minimice. De igual manera se escogen las constantes c y d de modo que $E[E(X \mid Y) - (cY + d)]^2$ se minimice.

Las rectas $y = ax + b$ y $x = cy + d$ se llaman *aproximaciones mínimas cuadráticas* a las correspondientes curvas de regresión $E(Y \mid x)$ y $E(X \mid y)$, respectivamente. El teorema siguiente relaciona esas rectas de regresión con las antes expuestas.

Teorema 7.18. Si $y = ax + b$ es la aproximación mínima cuadrática a $E(Y \mid x)$ y si $E(Y \mid x)$ es en realidad una función lineal de x, es decir,

$$E(Y \mid x)a'x + b'.$$

entonces, $a = a'$ y $b = b'$. Para la regresión de X sobre Y se mantiene una proposición análoga.

Demostración: Véase el problema 7.45.

PROBLEMAS

7.1. Encontrar el valor esperado de las siguientes variables aleatorias.

a) La variable aleatoria X definida en el problema 4.1.
b) La variable aleatoria X definida en el problema 4.2.
c) La variable aleatoria T definida en el problema 4.6.
d) La variable aleatoria X definida en el problema 4.18.

7.2. Demostrar que $E(X)$ no existe para la variable aleatoria X definida en el problema 4.25.

7.3. Lo siguiente representa la distribución de probabilidades de D, la demanda diaria de cierto producto. Calcular $E(D)$.

$$\begin{array}{ll} d: & 1, 2, 3, 4, 5, \\ P(D = d): & 0.1, 0.1, 0.3, 0.3, 0.2. \end{array}$$

7.4. En la fabricación del petróleo, la temperatura de destilación, T (en grados centígrados), es crucial para determinar la calidad del producto final. Supongamos que T se considera como una variable aleatoria distribuida uniformemente en (150, 300).

Supongamos que producir un galón de petróleo cuesta C_1 dólares. Si el aceite se destila a una temperatura menor que 200° C, el producto se conoce como nafta y se vende a C_2 dólares por galón. Si se destila a una temperatura mayor que 200° C, se conoce como aceite destilado refinado y se vende en C_3 dólares por galón. Encontrar la utilidad neta esperada (por galón).

7.5. Cierta aleación se forma al combinar la mezcla fundida de dos metales. La aleación que resulta contiene cierto porcentaje de plomo, digamos X, que puede considerarse como una variable aleatoria. Supongamos que X tiene la siguiente fdp:

$$f(x) = \tfrac{3}{5}10^{-5}x(100 - x), \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Suponer que P, la utilidad neta obtenida al vender esta aleación (por libra), es la siguiente función del porcentaje del contenido de plomo: $\rho = C_1 + C_2X$. Calcular la utilidad esperada (por libra).

7.6. Supóngase que un instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1000 horas) que se considera como una variable aleatoria continua con la siguiente fdp:

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Suponer que el costo de fabricación de tal artículo es \$2.00. El fabricante vende el artículo por \$5.00, pero garantiza un reembolso total si $X \leq 0.9$. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante por artículo?

7.7. Las 5 primeras repeticiones de un experimento cuestan \$10.00 cada una, y todas las subsiguientes tienen un valor de \$5.00 cada una. Suponer que el experimento se repite hasta obtener el primer resultado exitoso. Si la probabilidad de un resultado exitoso es siempre igual a 0.9 y si las repeticiones son independientes, ¿cuál es el costo esperado de la operación completa?

7.8. Se sabe que un lote contiene 2 artículos defectuosos y 8 no defectuosos. Si estos artículos se inspeccionan al azar, uno después de otro, ¿cuál es el número esperado de artículos que se deben escoger *para inspección* a fin de sacar todos los defectuosos?

7.9. Un lote de 10 motores eléctricos se debe rechazar totalmente o vender, según el resultado del siguiente proceso: dos motores se escogen al azar sin sustitución y se inspeccionan. Si uno o más son defectuosos, el lote se rechaza; de otro modo es aceptado. Suponer que cada uno de los motores cuesta \$75 y se vende por \$100; si el lote contiene 1 motor defectuoso, ¿cuál es la utilidad esperada del fabricante?

7.10. Suponiendo que D, la demanda diaria de un artículo, es una variable aleatoria con la siguiente distribución de probabilidades:

$$P(D = d) = C2^d/d!, \quad d = 1, 2, 3, 4.$$

a) Evaluar la constante C.

b) Calcular la demanda esperada.

c) Suponer que un artículo se vende por \$5.00. Un fabricante produce diariamente K artículos. Cualquier artículo que no se venda al término del día debe desecharse con una pérdida de \$3.00. *i*) Encontrar la distribución de probabilidades de la utilidad diaria, como una función de K. *ii*) ¿Cuántos artículos deberían fabricarse para maximizar la utilidad diaria esperada?

7.11. *a*) Con $N = 50$, $p = 0.3$, efectuar algunos cálculos para encontrar el valor de k que minimiza $E(X)$ en el ejemplo 7.12

b) Con los valores anteriores de N y p y usando $k = 5, 10, 25$, determinar para cada uno de los valores de k si es preferible el "examen del grupo".

7.12. Suponiendo que X y Y son variables aleatorias independientes con las siguientes fdp:

$$f(x) = 8/x^3, \quad x > 2; \quad g(y) = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

a) Encontrar la fdp de $Z = XY$.

b) Obtener $E(Z)$ de dos maneras: *i*) usando la fdp de Z como se obtuvo en *a*); *ii*) directamente, sin usar la fdp de Z.

7.13. Suponer que X tiene fdp

$$f(x) = 8/x^3, \quad x > 2.$$

Sea $W = \frac{1}{3}X$.

a) Calcular $E(W)$, usando la fdp de W.

b) Calcular $E(W)$, sin usar la fdp de W.

7.14. Un dado regular se lanza 72 veces. Puesto que X es el número de veces que aparece el seis, evaluar $E(X^2)$.

7.15. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria Y y Z del problema 5.2.

7.16. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria Y del problema 5.3.

7.17. Encontrar el valor esperado y la varianza de las variables aleatorias Y y Z del problema 5.5.

7.18. Encontrar el valor esperado y la varianza de las variables aleatorias Y, Z y W del problema 5.6.

7.19. Encontrar el valor esperado y la varianza de las variables aleatorias V y S del problema 5.7.

7.20. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria Y del problema 5.10 para cada uno de los tres casos.

7.21. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria A del problema 6.7.

7.22. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria H del problema 6.11.

7.23. Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria W del problema 6.13.

7.24. Suponer que X es una variable aleatoria para la cual $E(X) = 10$ y $V(X) = 25$. ¿Para qué valores positivos de a y b tiene $Y = aX - b$ esperanza 0 y varianza 1?

7.38. Suponer que la variable aleatoria bidimensional (X,Y) tiene la fdp dada por

$$f(x,y) = ke^{-y}, \quad 0 < x < y < 1$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

(Véase la Fig. 7.18.) Encontrar el coeficiente de correlación ρ_{xy}.

7.39. El ejemplo siguiente ilustra que $\rho = 0$ no implica independencia. Suponer que (X,Y) tiene una distribución conjunta de probabilidades dada por la tabla 7.1.

a) Demostrar que $E(XY) = E(X)E(Y)$ y luego $\rho = 0$.
b) Indicar por qué X y Y no son independientes.
c) Demostrar que este ejemplo se puede generalizar como sigue. La elección del número $\frac{1}{8}$ no es crucial. Lo importante es que todos los valores dentro de un círculo son los mismos, todos los que están en cuadrados son los mismos y el valor del centro es igual a cero.

TABLA 7.1

Y \ X	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

7.40. Supóngase que A y B son dos eventos asociados con un experimento ε. Supóngase que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Definir las variables aleatorias X y Y como sigue

$$X = 1 \quad \text{si } A \text{ ocurre y 0 en cualquier otro caso,}$$

$$Y = 1 \quad \text{si } B \text{ ocurre y 0 en cualquier otro caso.}$$

Demostrar que $\rho_{xy} = 0$ implica que X y Y son independientes.

7.41. Demostrar el teorema 7.14.

7.42. Para la variable aleatoria (X,Y) definida en el problema 6.14, calcular $E(X \mid y)$, $E(Y \mid x)$ y verificar que $E(X) = E[E(X \mid Y)]$ y $E(Y) = E[E(Y \mid X)]$.

7.43. Demostrar el teorema 7.16.

7.44. Demostrar el teorema 7.17. [*Indicación*: En el caso continuo, multiplicar la ecuación $E(Y \mid x) = Ax + B$ por $g(x)$, la fdp de X, e integrar de $-\infty$ a ∞. Hacer lo mismo usando $xg(x)$ y luego resolver las dos ecuaciones resultantes para A y para B.]

7.45. Demostrar el teorema 7.18.

7.46. Si X, Y y Z son variables aleatorias no correlacionadas con desviaciones estándar 5, 12 y 9, respectivamente, y si $U = X + Y$ y $V = Y + Z$, evaluar el coeficiente de correlación entre U y V.

7.47. Supóngase que ambas curvas de regresión de los promedios son realmente lineales. Específicamente, suponer que $E(Y \mid x) = -\frac{3}{2}x - 2$ y $E(X \mid y) = -\frac{3}{5}y - 3$.

a) Determinar el coeficiente de correlación ρ.
b) Determinar $E(X)$ y $E(Y)$.

7.48. Considérese el pronóstico del tiempo con dos alternativas: "lluvia" o "no lluvia" en las próximas 24 horas. Suponiendo que ρ = Prob(lluvia en las próximas 24 horas) $> \frac{1}{2}$. El pronosticador anota 1 punto si acierta y 0 si no. Al hacer n pronósticos, un pronosticador sin destreza elige al azar r días cualesquiera ($0 \leq r \leq n$) para decir "llueve" y los $n - r$ días restantes para decir "no llueve". Su puntaje total anotado es S_n. Calcular $E(S_n)$ y $\text{Var}(S_n)$ y encontrar el valor de r para el cual $E(S_n)$ es el mayor. [*Indicación:* Sea $X_i = 1$ o 0 dependiendo si el i-ésimo pronóstico es correcto o no. Luego, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Nótese que las X_i *no* son independientes.]

8

La variable aleatoria de Poisson y otras variables aleatorias discretas

8.1 La distribución de Poisson

Tal como en los modelos deterministas, en los cuales ciertas relaciones funcionales desempeñan un papel importante (tales como lineales, cuadráticas, exponenciales, trigonométricas, etc.), al elaborar modelos no deterministas para fenómenos observables, también encontramos que ciertas distribuciones de probabilidades aparecen más a menudo que otras. Una razón de esto es que, como en el caso determinista, algunos modelos matemáticos relativamente simples parecen ser capaces de describir un gran número de fenómenos.

En este capítulo expondremos con mucho detalle diversas variables aleatorias discretas. En el capítulo siguiente haremos lo mismo con variables aleatorias continuas.

Presentemos formalmente la siguiente variable aleatoria. Más adelante indicaremos en qué condiciones esta variable aleatoria podría representar al resultado de un experimento aleatorio.

Definición. Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles: $0, 1, \ldots, n, \ldots$ Si

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \ldots, \tag{8.1}$$

decimos que X tiene una *distribución de Poisson* con parámetro $\alpha > 0$.

Para verificar que la anterior representa una legítima distribución de probabilidades, simplemente observemos que $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty}(e^{-\alpha}\alpha^k/k!) = e^{-\alpha}\, e^{\alpha} = 1$.

Observación: Puesto que estamos definiendo en forma directa la variable aleatoria en términos de su recorrido y distribución de probabilidades, sin referencia a ningún espacio muestral original S, podemos suponer que el espacio muestral S se ha identificado con R_x y que $X(s) = s$. Es decir, los resultados del experimento son simplemente los números $0, 1, 2, \ldots$ y las probabilidades asociadas con cada uno de esos resultados están dadas por la ecuación (8.1).

Teorema 8.1. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro α, entonces $E(X) = \alpha$ y $V(x) = \alpha$.

Demostración:
$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ke^{-\alpha}\alpha^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{(k-1)!}.$$

Haciendo $s = k - 1$, encontramos que se convierte en

$$E(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^{s+1}}{s!} = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^s}{s!} = \alpha.$$

De modo semejante,

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{(k-1)!}.$$

Haciendo nuevamente $s = k - 1$, obtenemos

$$E(X^2) = \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)\frac{e^{-\alpha}\alpha^{s+1}}{s!} = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} s\frac{e^{-\alpha}\alpha^s}{s!} + \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^s}{s!} = \alpha^2 + \alpha$$

[puesto que la primera suma representa $E(X)$, mientras que la segunda suma es igual a uno]. Luego,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha.$$

Observación: Nótese la interesante propiedad que posee la variable aleatoria de Poisson: su esperanza es igual a su varianza.

8.2 La distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial

La distribución de Poisson desempeña un papel importante por derecho propio como modelo probabilístico apropiado para un gran número de fenómenos aleatorios. Este punto se expondrá en la sección siguiente. Aquí nos interesa la importancia de esta distribución para aproximarse a las probabilidades binomiales.

EJEMPLO 8.1. Supóngase que las llamadas telefónicas llegan a una gran central telefónica y que en un periodo especial de tres horas (180 minutos) se ha recibido un total de 270 llamadas, o sea, 1.5 llamadas por minuto. Supóngase que, con base la evidencia anterior, queremos calcular la probabilidad de recibir 0, 1, 2, etc. llamadas durante los próximos tres minutos.

Al considerar los fenómenos de llamadas recibidas, podríamos concluir que en *cualquier* instante es tan probable que ocurra una llamada telefónica como en cualquier otro momento. Es decir, la probabilidad permanece constante de "punto de tiempo" a "punto de tiempo". La dificultad es que aun en un intervalo de tiempo muy corto, el número de puntos no sólo es infinito sino que no puede ser enumerado. Esto nos lleva a una serie de aproximaciones que describiremos ahora.

Para empezar, podríamos considerar la subdivisión del intervalo de tres minutos en nueve subintervalos de 20 segundos cada uno. Podríamos considerar entonces cada uno de esos nueve intervalos como un ensayo de Bernoulli durante el cual observamos una llamada (éxito) o ninguna llamada (fracaso) con $P(\text{éxito}) = (1.5)20/60 = 0.5$. Así podríamos inclinarnos a decir que la probabilidad de dos llamadas durante el intervalo de tres minutos (es decir, 2 éxitos en 9 ensayos con $P(\text{éxito}) = 0,5$) es igual a $\binom{9}{2}(1/2)^9 = 9/128$.

La dificultad con esta aproximación es que ignoramos la posibilidad de, digamos, dos o tres, etc., llamadas durante uno de nuestros ensayos

con periodos de 20 segundos. Si se considera esta posibilidad, el uso anterior de la distribución binomial no sería legítimo, ya que esa distribución es aplicable sólo cuando existe una dicotomía, una llamada o ninguna llamada.

Para evitar esta dificultad hacemos la aproximación siguiente y, de hecho, nos lleva a una sucesión completa de aproximaciones. Una manera de estar más o menos seguro de que al menos se recibe una llamada en la central durante un intervalo de tiempo pequeño, es hacer que ese intervalo sea muy corto. Así, en vez de considerar nueve intervalos de 20 segundos de duración, consideremos los 18 intervalos siguientes, cada uno de 10 segundos de duración. Podemos representar ahora nuestro experimento como 18 ensayos de Bernoulli con $P(\text{éxito}) = P(\text{recibir una llamada durante un subintervalo}) = (1.5)10/60 = 0.25$. Por tanto, $P(\text{dos llamadas durante el intervalo de tres minutos}) = \binom{18}{2}(0.25)^2(0.75)^{16}$. Nótese que aunque ahora tratamos una distribución binomial diferente a la de antes (es decir, que tiene parámetros $n = 18$, $p = 0.25$, en vez de $n = 9$, $p = 0.5$), *el valor* np *esperado es el mismo*, a saber, $np = 18(0.25) = 9(0.5) = 4.5$.

Si continuamos de esta manera, aumentando el número de subintervalos (es decir, n), disminuiremos al mismo tiempo la probabilidad de recibir una llamada (es decir, p) de tal manera que np permanece constante.

Así, el ejemplo precedente nos conduce a formular la pregunta siguiente: ¿qué sucede a las probabilidades binomiales $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ si $n \to \infty$ y $p \to 0$, de tal manera que np permanezca constante, es decir, $np = \alpha$?

Los cálculos siguientes dan la respuesta a este importante cuestionamiento.

Consideremos la expresión general para la probabilidad binomial,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Sea $np = \alpha$. Por tanto, $p = \alpha/n$, y $1 - p = 1 - \alpha/n = (n - \alpha)/n$. Sustituyendo todos los términos que contienen p por sus expresiones equivalentes en función de α, obtenemos

$$P(X=k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\alpha}{n}\right)^k\left(\frac{n-\alpha}{n}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{\alpha^k}{k!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\left[1-\frac{\alpha}{n}\right]^{n-k}$$
$$= \frac{\alpha^k}{k!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$$
$$\times\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k}.$$

Ahora sea $n \to \infty$ de tal manera que $np = \alpha$ permanezca constante. Esto obviamente significa que $p \to 0$ cuando $n \to \infty$, porque de otra manera np no podría permanecer constante. (De igual forma, podríamos necesitar que $n \to \infty$ y $p \to 0$ de tal manera que $np \to \alpha$.)

En la expresión anterior, los términos de la forma $(1 - 1/n)$, $(1 - 2/n)$,... tienden a uno cuando n tiende a infinito, como lo hace $(1 - \alpha/n)^{-k}$. Es bien sabido (de la definición del número e) que $(1-\alpha/n)^n \to e^{-\alpha}$ cuando $n \to \infty$.

Así, $\lim_{n\to\infty} P(X = k) = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$ Es decir, en el límite obtenemos la distribución de Poisson con parámetro α. Este importante resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 8.2. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p (con base en n repeticiones del experimento). Esto es,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Supóngase que cuando $n \to \infty$, $np = \alpha$ (constante), o equivalentemente, cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ tal que $np \to \alpha$. En estas condiciones tenemos

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!},$$

la distribución de Poisson con parámetro α.

Observaciones: a) El teorema anterior esencialmente dice que podemos aproximar las probabilidades binomiales con las probabilidades de la distribución de Poisson siempre que n sea grande y p pequeña.

b) Ya hemos verificado que si X tiene una distribución binomial, $E(X) = np$, mientras que si X tiene una distribución de Poisson (con parámetro α), $E(X) = \alpha$.

c) La distribución binomial se caracteriza por dos parámetros, n y p, mientras que la distribución de Poisson se caracteriza por un solo parámetro, $\alpha = np$, que representa al número esperado de éxitos por unidad de tiempo (o por unidad de espacio en algún otro caso). Este parámetro también se designa como *intensidad* de la distribución. Es importante distinguir entre el número esperado de ocurrencias por *unidad* de tiempo y el número esperado de ocurrencias en el tiempo especificado. Así, en el ejemplo 8.1, la intensidad es 1.5 llamadas por minuto y, por lo tanto, el número esperado de llamadas en un periodo de 10 minutos, por ejemplo, sería 15.

d) También podemos considerar el siguiente argumento para evaluar la varianza de una variable aleatoria X de Poisson con parámetro α: X se puede considerar como un caso límite de una variable aleatoria Y distribuida binomialmente con parámetro n y p, donde $n \to \infty$ y $p \to 0$ de tal manera que $np \to \alpha$. Puesto que $E(Y) = np$ y $\text{Var}(Y) = np(1 - p)$, observemos que en el límite $\text{Var}(Y) \to \alpha$.

Se dispone de extensas tablas para la distribución de Poisson. (E. C. Molina, *Poisson's Exponential Binomial Limit*, D. Van Nostrand Company, Inc., Nueva York, 1942). Una breve tabulación de esta distribución se da en el Apéndice.

Consideremos otros tres ejemplos adicionales que ilustran las aplicaciones de la distribución de Poisson mencionadas previamente.

EJEMPLO 8.2. En una concurrida intersección de tráfico la probabilidad p de que un automóvil tenga un accidente es muy escasa, digamos $p = 0.0001$. Sin embargo, durante cierta parte del día, entre las 4 PM y las 6 PM un gran número de automóviles pasa por la intersección, digamos 1000. En dichas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que dos o más accidentes ocurran durante ese periodo?

Formulemos algunas hipótesis. Supongamos, en primer lugar, que el valor anterior de p es el mismo para cada uno de los automóviles. En segundo lugar, supongamos que si un automóvil tiene o no un accidente, no depende de lo que le suceda a cualquier otro automóvil. (Esta suposición, obviamente, no es realista; no obstante la formularemos.) Así podemos suponer que si X es el número de accidentes entre los 1000 automóviles que llegan, entonces X tiene una distribución binomial con $p = 0.0001$. (Otra hipótesis, no indicada de manera explícita, es que n, el número de automóviles que pasa por la intersección entre las 4 PM y

las 6 PM está predeterminada en 1000. Desde luego, un planteamiento más realista sería considerar n misma como una variable aleatoria cuyo valor depende de un mecanismo aleatorio. Sin embargo, no haremos esto aquí, sólo consideraremos n como fija.) Por tanto, podemos obtener el valor exacto de la probabilidad deseada:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - (0.9999)^{1000} - 1000(0.0001)(0.9999)^{999}. \end{aligned}$$

La evaluación de los valores anteriores da origen a una dificultad considerable. Puesto que n es grande y p es pequeña, aplicamos el teorema 8.2 y obtenemos la aproximación siguiente:

$$P(X = k) \cong \frac{e^{-0.1}(0.1)^k}{k!}.$$

Por tanto,

$$P(X \geq 2) \cong 1 - e^{-0.1}(1 + 0.1) = 0.0045.$$

EJEMPLO 8.3. Supóngase que un proceso de fabricación produce artículos de tal manera que cierta proporción (constante) de artículos, digamos p, son defectuosos. Si se obtiene un lote n de tales artículos, la probabilidad de obtener exactamente k defectuosos puede calcularse de la distribución binomial como $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, donde X es el número de defectuosos en el lote. Si n es grande y p es pequeña (como sucede a menudo), debemos aproximar la probabilidad anterior por

$$P(X = k) \simeq \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}.$$

Supóngase, por ejemplo, que un fabricante produce artículos de los cuales alrededor de 1 en 1000 son defectuosos. Esto es, $p = 0.001$. Por tanto, usando la distribución binomial, encontramos que en un lote de 500 artículos la probabilidad de que ninguno sea defectuoso es $(0.999)^{500} = 0.609$. Si aplicamos la aproximación de Poisson, esta probabilidad puede escribirse como $e^{-0.5} = 0.61$. La probabilidad de encontrar 2 o más artículos defectuosos es, de acuerdo con la aproximación de Poisson, $1 - e^{-0.5}(1 + 0.5) = 0.085$.

EJEMPLO 8.4. [Sugerido por un análisis en *Cálculo de probabilidades* de A. Renyi (en alemán), VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlín, 1962].

En la fabricación de botellas de vidrio, se encuentran partículas duras y pequeñas en el vidrio fundido a partir del cual se hacen las botellas. Si aparece una sola partícula en una botella, ésta no puede usarse y debe desecharse. Se supone que las partículas están esparcidas al azar en el vidrio fundido. Supondremos que el vidrio fundido se produce de tal manera que el número de partículas es (en promedio) el mismo para una cantidad constante de vidrio fundido. Supóngase en particular que en 100 kilos de vidrio fundido se encuentran x de tales partículas y que es necesario 1 kilo de vidrio fundido para hacer una de estas botellas.

Pregunta: ¿Qué porcentaje de botellas tendrá que descartarse debido a que son defectuosas? A primera vista la "solución" de este problema podría ser como sigue. Puesto que el material para 100 botellas contiene x partículas, aproximadamente el $x\%$ de las botellas deberá desecharse. Una pequeña reflexión indicará, sin embargo, que la solución anterior no es correcta, ya que una botella defectuosa puede tener más de 1 partícula, bajando así el porcentaje de botellas defectuosas obtenidas del material que sobra.

A fin de obtener una solución "correcta", hagamos las siguientes suposiciones simplificadoras: *a*) cada una de las partículas puede aparecer en el material de cada una de las botellas con igual probabilidad y *b*) la distribución de cualquier partícula es independiente de cualquier otra partícula. Con estas suposiciones, podemos reducir nuestro problema al siguiente modelo de "urna". Entre N urnas, se distribuyen al azar n esferas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una urna elegida al azar se encuentren exactamente k esferas? (Las urnas corresponden desde luego a las botellas, mientras que las esferas corresponden a las partículas.)

Siendo Z el número de esferas encontradas en una urna escogida aleatoriamente, se deduce, de la hipótesis anterior, que Z está distribuida binomialmente con parámetro $1/N$. Por lo tanto,

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-k}.$$

Supóngase ahora que el vidrio fundido se prepara en cantidades muy grandes. De hecho supongamos que se prepara en unidades de 100 Kg, y que se han suministrado M de tales unidades. Luego, $N = 100M$ y

$n = xM$. Sea $\alpha = x/100$, lo que iguala la proporción de partículas por botella. Así, $N = n/\alpha$ y la probabilidad anterior puede escribirse como

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}.$$

Así, cuando el proceso de producción continúa (esto es, $M \to \infty$ y por tanto $n \to \infty$), obtenemos.

$$P(Z = k) \simeq \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!} \quad \text{donde } \alpha = \frac{x}{100}.$$

Calculemos la probabilidad de que deba desecharse una botella. Ésta es igual a $1 - P(Z = 0)$. Luego, $P(\text{botella defectuosa}) \simeq 1 - e^{-x/100}$. Si el número de botellas producidas es muy grande, podemos identificar la probabilidad de una botella defectuosa con la frecuencia relativa de botellas defectuosas. Por tanto, el porcentaje de botellas defectuosas es aproximadamente $100(1 - e^{-x/100})$. Si desarrollamos $100(1 - e^{-x/100})$ en una serie de Maclaurin, obtenemos

$$100\left[1 - \left(1 - \frac{x}{100} + \frac{x^2}{2(100)^2} - \frac{x^3}{3!(100)^3} + \cdots\right)\right]$$

$$= x - \frac{x^2}{2(100)} + \frac{x^3}{6(100)^2} - \cdots$$

Así, si x es pequeña, la proporción de botellas desechadas *es* aproximadamente x, como se sugirió primero. Sin embargo, para una x grande esto ya no es válido. En caso que $x = 100$, el porcentaje de botellas desechadas *no* es 100, sino que $100(1 - e^{-1}) = 63.21\%$. Éste, es por supuesto, un caso extremo y no se encontraría en un proceso controlado razonablemente. Supongamos que $x = 30$ (un número más realista). Por tanto, en vez de desechar el 30% de nuevo nuestra solución inicial), desecharíamos sólo $100(1 - e^{-0.3}) = 25.92\%$. Podríamos observar que si x es razonablemente grande, es más económico producir botellas de menor tamaño. Por ejemplo, si necesitamos sólo 0.25 kg de vidrio fundido por botella en vez de 1 kg, y si $x = 30$, entonces el porcentaje descartado se reduce de 25.92% a 7.22%.

8.3 El proceso de Poisson

En la sección anterior se usó la distribución de Poisson como un medio para aproximar una distribución conocida, a saber, binomial. Sin embargo, la distribución de Poisson desempeña un papel muy importante por derecho propio, puesto que representa un modelo probabilístico adecuado para un gran número de fenómenos observables.

Aunque no vamos a dar una deducción completamente rigurosa de algunos resultados que vamos a exponer, el planteamiento general es de tal importancia que deberá tomarse en cuenta para comprenderlos, aun cuando no podamos justificar cada uno de los pasos.

Para referirnos a un ejemplo específico mientras concluimos los detalles matemáticos, consideremos una fuente de material radiactivo que emite partículas α. Sea definida X_t como el número de partículas emitidas durante un periodo de tiempo específico $[0, t]$. Vamos a hacer algunas hipótesis acerca de la variable aleatoria (discreta) X_t que nos permitirán determinar la distribución de probabilidades de X_t. La posibilidad de estas hipótesis (recordando lo que X_t representa) se justifica por el hecho de que la evidencia empírica sostiene una cantidad considerable de resultados teóricos que vamos a derivar.

Puede ser útil señalar que en la deducción de cualquier resultado matemático debemos aceptar algunos postulados o axiomas fundamentales. En la búsqueda de axiomas para describir fenómenos observables, algunos axiomas pueden ser más apropiados (y menos arbitrarios) que otros. Por ejemplo, al describir el movimiento de un objeto impulsado hacia arriba con cierta velocidad inicial, podríamos suponer que la distancia sobre el suelo, llamémosla s, es una función cuadrática del tiempo t; es decir, $s = at^2 + bt + c$. Ésta sería difícilmente una hipótesis intuitiva, de acuerdo con nuestra experiencia. En su lugar, podríamos suponer que la aceleración es una constante y luego de esto *deducir* que s *debe* ser una función cuadrática de t. Lo importante es por supuesto que si debemos suponer algo con el propósito de elaborar nuestro modelo matemático, preferiríamos suponer lo que es apropiado, en vez de lo que no lo es.

El mismo objetivo nos guía a elaborar un modelo probabilístico para la emisión de partículas α de una fuente radiactiva. La variable aleatoria X_t antes definida puede tomar los valores $0, 1, 2, \ldots$ Sea $P_n(t) = P[X_t = n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Vamos a enunciar ahora las cinco *hipótesis* siguientes.

A_1: El número de partículas emitidas durante intervalos de tiempo *no sobrepuestos* son variables aleatorias *independientes*.

A_2: Si X_t se define como antes y si Y_t es igual al número de partículas emitidas durante $[t_1, t_1 + t]$, para cualquier $t_1 > 0$, las variables aleatorias X_t y Y_t tienen la misma distribución de probabilidades. (En otras palabras, la *distribución* del número de partículas emitidas durante cualquier intervalo depende sólo de la *longitud* del intervalo y no de los puntos extremos.)

A_3: $p_1(\Delta t)$ es igual aproximadamente a $\lambda \Delta t$, si Δt es suficientemente pequeña, donde λ es una constante positiva. Esto lo escribimos como $P_1(\Delta t) \sim \lambda \Delta t$. En toda *esta* sección $a(\Delta t) \sim b(\Delta t)$ significa que $a(\Delta t)/b(\Delta t) \to 1$, cuando $\Delta t \to 0$. También supondremos que $\Delta t > 0$. (Esta hipótesis expresa que si el intervalo es suficientemente pequeño, la probabilidad de obtener exactamente una emisión durante ese intervalo es directamente proporcional a la longitud del intervalo.)

A_4: $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 0$. (Esto implica que $p_k(\Delta t) \to 0$, $k \geq 2$.). Esto significa que la probabilidad de obtener dos o más emisiones en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

A_5: $X_0 = 0$, o de manera equivalente $P_0(0) = 1$. Esto equivale a una condición inicial para el modelo que estamos describiendo.

Como lo demostraremos en breve, las cinco hipótesis anteriores harán posible que deduzcamos una expresión para $p_n(t) = P[X_t = n]$. Saquemos ahora algunas conclusiones de dichas hipótesis.

a) Las hipótesis A_1 y A_2 juntas implican que la variable aleatoria X_t y $[X_{t+\Delta t} - X_t]$ son variables aleatorias independientes con la *misma* distribución de probabilidades. (Véase Fig. 8.1.)

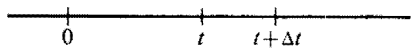


FIGURA 8.1

b) De las hipótesis A_3 y A_4 podemos concluir que

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - \sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 1 - \lambda \Delta t. \tag{8.2}$$

c) Podemos escribir

$$P_0(t+\Delta t) = P[X_{t+\Delta t} = 0]$$

$$= P[X_t = 0 \quad \text{y} \quad (X_{t+\Delta t} - X_t) = 0]$$

$$= p_0(t)p_0(\Delta t). \qquad \text{[Véase la conclusión } a\text{).]}$$

$$\sim p_0(t)[1 - \lambda\Delta t]. \qquad \text{[Véase la Ec. (8.2).]}$$

d) Entonces tenemos

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} \sim -\lambda p_0(t).$$

Haciendo $\Delta t \to 0$, y observando que el lado izquierdo representa el cociente de la diferencia de la función p_0 y, por tanto, tiende a $p_0'(t)$ (más precisamente, a la derivada por la derecha, puesto que $\Delta t > 0$), tenemos.

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda.$$

Integrando ambos miembros respecto a t, obtenemos $\ln p_0(t) = -\lambda t + C$, donde C es una constante de integración. De la hipótesis A_5 encontramos, al hacer $t = 0$, que $C = 0$. Luego,

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{8.3}$$

Así, nuestras hipótesis nos han conducido a una expresión para $P[X_t = 0]$. Utilizando esencialmente el mismo planteamiento, obtendremos ahora $p_n(t)$ para $n \geq 1$.

e) Considerando $p_n(t+\Delta t) = P[X_{t+\Delta t} = n]$.

Ahora $X_{t+\Delta t} = n$ si y sólo si $X_t = xy[X_{t+\Delta t} - X_t] = n - x$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Utilizando las suposiciones A_1 y A_2, tenemos

$$p_n(t+\Delta t) = \sum_{x=0}^{n} p_x(t)p_{n-x}(\Delta t)$$

$$= \sum_{x=0}^{n-2} p_x(t)p_{n-x}(\Delta t) + p_{n-1}(t)p_1(\Delta t) + p_n(t)P_0(\Delta t).$$

Utilizando las hipótesis A_3 y A_4 y la ecuación (8.2), obtenemos

$$p_n(t + \Delta t) \sim p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)[1 - \lambda\Delta t].$$

Luego

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \sim \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t).$$

Nuevamente haciendo $\Delta t \to 0$, y observando otra vez que el lado izquierdo representa el cociente diferencial de la función p_n, obtenemos

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ésta representa un sistema infinito de ecuaciones lineales diferenciales de diferencias. El lector interesado puede verificar que si definimos la función q_n por la relación $q_n(t) = e^{\lambda t}p_n(t)$, el sistema anterior se transforma en $q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ Puesto que $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, encontramos que $q_0(t) = 1$. [Nótese también que $q_n(0) = 0$ para $n > 0$.] Así obtenemos, recursivamente,

$$q_1'(t) = \lambda, \qquad \text{y, por tanto, } q_1(t) = \lambda t;$$

$$q_2'(t) = \lambda q_1(t) = \lambda^2 t, \quad \text{y, por tanto, } q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}.$$

En general, $q_n'(t) = \lambda q_{n-1}(t)$ y, por tanto, $q_n(t) = (\lambda t)^n/n!$ Al recordar la definición de q_n, finalmente obtenemos

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.4}$$

Hemos demostrado así que el número de partículas emitidas durante el intervalo de tiempo [0, t) de una fuente radiactiva, con las suposiciones hechas anteriormente, es una variable aleatoria con una distribución de Poisson con parámetros $(\lambda\, t)$.

Observaciones: a) Es importante darse cuenta de que la distribución de Poisson apareció como una *consecuencia* de ciertas suposiciones que hicimos. Esto significa que cada vez que dichas suposiciones sean válidas (o al menos lo sean aproximadamente) la distribución de Poisson debe usarse como un modelo

apropiado. Resulta que hay una gran cantidad de fenómenos para los cuales es adecuado el modelo de Poisson.

i) Representemos por X_t el número de llamadas telefónicas que llegan a una central telefónica durante un periodo de tiempo de longitud t. Las suposiciones anteriores se satisfacen aproximadamente, en especial durante el "periodo congestionado" del día. Luego, X_t tiene una distribución de Poisson.

ii) Representemos por X_t el número de electrones que salen del cátodo de un tubo al vacío. Nuevamente las suposiciones son apropiadas y, por tanto, X_t tiene una distribución de Poisson.

iii) El ejemplo siguiente (de astronomía) indica que el razonamiento anterior se puede aplicar no sólo al número de ocurrencias de un evento durante un periodo de tiempo fijo, sino también al número de ocurrencias de un evento dentro de los límites fijados de un *área* o un *volumen*. Supóngase que un astrónomo investiga una parte de la Vía Láctea y supóngase que en la parte considerada la densidad de estrellas, llamémosla λ, es constante (Esto significa que en un volumen de V (unidades cúbicas), se encontrarían, en promedio, λV estrellas.) Sea X_v igual al número de estrellas encontradas en una parte de la Vía Láctea que tiene un volumen V. Si se satisfacen las suposiciones anteriores (sustituyendo "volumen" por "tiempo", entonces $P[X_v = n] = (\lambda V)^n e^{-\lambda V}/n!$ (Las suposiciones, interpretadas en este ejemplo, establecerían esencialmente que el número de estrellas que aparecen en partes no sobrepuestas del firmamento representa variables aleatorias independientes y que la probabilidad de que aparezca más de una estrella en una porción pequeña del cielo es cero.)

iv) Se nos ocurre otra aplicación en el campo biológico, si hacemos que X_A sea el número de células sanguíneas visibles en el microscopio, donde el área de la superficie visible en el microscopio es dada por A unidades cuadradas.

b) La constante λ apareció originalmente como una constante de proporcionalidad en la hipótesis A_3. Vale la pena mencionar las siguientes interpretaciones de λ: si X_t representa el número de ocurrencias de un evento durante un intervalo de tiempo de longitud t, entonces, $E(X_t) = \lambda t$ y, por tanto, $\lambda = [E(X_t)]/t$ representa la *razón* esperada con la cual se emiten las partículas. Si X_v representa el número de ocurrencias de algún evento dentro de un volumen especificado V, entonces $E(X_v) = \lambda V$ y, por lo tanto, $\lambda = [E(X_v)/V$ representa la *densidad* esperada con la cual aparecen las estrellas.

c) Es importante señalar que nuestra exposición en la sección 8.3 no se refirió sólo a *una* variable aleatoria X que posee una distribución de Poisson, sino que para cada $t > 0$, encontramos que X_t tenía una distribución de Poisson con un parámetro dependiente de t. Tal colección (infinita) de variables aleatorias también se conoce como *proceso de Poisson*. (De igual forma, se genera

un proceso de Poisson cada vez que ocurre un evento en algún intervalo de tiempo de modo que se satisfagan las hipótesis A_1 hasta A_5.) De manera análoga podemos definir un *proceso de Bernoulli*: si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ son los números de ocurrencias de eventos en $1, 2, \ldots n$, ensayos de Bernoulli, entonces la colección de variables aleatorias $X_1, \ldots X_n, \ldots$ se llaman proceso de Bernoulli.

EJEMPLO 8.5. Una complicada maquinaria, cuando funciona perfectamente, puede producir una utilidad de C dólares por hora ($C > 2$) a una compañía. Sin embargo, esta máquina tiene una tendencia a fallar en momentos inesperados e impredecibles. Supóngase que el número de fallas durante cualquier periodo de longitud t horas es una variable aleatoria con una distribución de Poisson con parámetro t. Si la máquina falla x veces durante t horas, la pérdida ocasionada (la improductividad de la máquina más la reparación) es igual a $(x^2 + x)$ dólares. Luego, la utilidad total P durante cualquier periodo de t horas es igual a $P = Ct - (X^2 + X)$, donde X es la variable aleatoria que representa el número de fallas de la máquina. Por tanto, P es una variable aleatoria, y podría ser interesante elegir t (lo que está a nuestra voluntad) de manera tal que la *utilidad esperada* sea maximizada. Tenemos

$$E(P) = Ct - E(X^2 + X).$$

Según el teorema 8.1 encontramos que $E(X) = t$ y $E(X^2) = t + (t)^2$. Luego se deduce que $E(P) = Ct - 2t - t^2$. Para encontrar el valor de t, para el cual se maximiza $E(P)$, diferenciamos $E(P)$ e igualamos a cero la expresión resultante. Obtenemos $C - 2 - 2t = 0$, obteniendo $t = \frac{1}{2}(C - 2)$ horas.

EJEMPLO 8.6. Sea X_t igual al número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un intervalo de tiempo de longitud t. Supóngase que X_t tiene una distribución de Poisson con parámetro αt. Se instala un instrumento para anotar el número de partículas emitidas. Supóngase que hay una probabilidad constante p de que cualquier partícula emitida no se cuente. Si R_t es igual al número de partículas contadas durante el intervalo específico, ¿cuál es la distribución de probabilidades de R_t?

Para $X_1 = x$ *dada*, la variable aleatoria R_t tiene una distribución binomial con base en x repeticiones con parámetro $(1 - p)$. Esto es,

$$P(R_t = k \mid X_t = x) = \binom{x}{k}(1-p)^k p^{x-k}.$$

Usando la fórmula de la probabilidad total, (Ec. 3.4), tenemos

$$\begin{aligned} P(R_t = k) &= \sum_{x=k}^{\infty} P(R_t = k \mid X_t = x) P(X_t = x) \\ &= \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x}{k}(1-p)^k p^{x-k} e^{-\alpha t}(\alpha t)^x / x! \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} \sum_{x=k}^{\infty} \frac{1}{(x-k)!}(p\alpha t)^x. \end{aligned}$$

Sea $i = x - k$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(R_t = k) &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(p\alpha t)^{i+k}}{i!} \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!}(p\alpha t)^k e^{p\alpha t} \\ &= \frac{e^{-\alpha(1-p)t}[(1-p)\alpha t]^k}{k!}. \end{aligned}$$

Así encontramos que R_t tiene una distribución de Poisson con parámetro $(1-p)\alpha t$.

8.4 La distribución geométrica

Supóngase que efectuamos un experimento ε y que estamos interesados sólo en la ocurrencia o no ocurrencia de algún evento A. Supóngase, como en la presentación de la distribución binomial, que repetidamente efectuamos ε, que las repeticiones son independientes y que en cada una de ellas $P(A) = p$ y $P(A^c) = 1 - p \doteq q$ permanecen constantes. Supóngase que repetimos el experimento hasta que A ocurre por primera vez. (Aquí nos apartamos de las hipótesis que conducen a la distribución binomial. Allí el número de repeticiones era predeterminado, mientras que aquí es una variable aleatoria.)

Definamos la variable aleatoria X como el número de repeticiones necesarias hasta incluir la primera ocurrencia de A. Así, X toma los

valores posibles $1, 2, \ldots$ Puesto que $X = k$ si y sólo si las primeras $(k-1)$ repeticiones de ε producen A^c, mientras que la k-ésima da por resultado A, tenemos

$$P(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8.5}$$

Se dice que una variable aleatoria con una distribución de probabilidades, ecuación (8.5), tiene una distribución *geométrica*.

Un cálculo sencillo indica que la ecuación (8.5) define una distribución de probabilidades legítimas. Obviamente tenemos $P(X = k) \geq 0$. Y

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = p(1 + q + q^2 + \cdots) = p\left[\frac{1}{1-q}\right] = 1.$$

Podemos obtener el valor esperado de X como sigue.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq}q^k$$
$$= p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = p\frac{d}{dq}\left[\frac{q}{1-q}\right] = \frac{1}{p}.$$

(El intercambio de derivadas y sumatorias se justifica aquí puesto que la serie converge para $|q| < 1$.) Un cálculo similar muestra que $V(X) = q/p^2$. (Nuevamente obtendremos los dos resultados en el capítulo 10, usando un planteamiento distinto.) Para resumir lo anterior, tenemos el teorema siguiente.

Teorema 8.3. Si X tiene una distribución geométrica como se da en la ecuación (8.5),

$$E(X) = 1/p \quad \text{y} \quad V(X) = q/p^2.$$

Observación: El hecho de que $E(X)$ sea el recíproco de p es interesante intuitivamente, puesto que dice que con valores pequeños de $p = P(A)$ se necesitan muchas repeticiones para que ocurra A.

EJEMPLO 8.7. Supóngase que el costo de efectuar un experimento es \$1000. Si el experimento falla, se incurre en un costo adicional de

$300 debido a ciertos cambios que deben efectuarse antes de que se intente un nuevo experimento. Si la probabilidad de éxito en cualquiera de los ensayos es 0.2, si los ensayos aislados son independientes y si los experimentos continúan hasta que se obtiene el primer resultado exitoso, ¿cuál es el costo esperado del procedimiento completo?

Si C es el costo y X el número de ensayos necesarios para obtener éxito, tenemos que $C = 1000X + 300(X - 1) = 1300X - 300$. Por tanto,

$$E(C) = 1300E(X) - 300 = 1300\frac{1}{0.2} - 300 = \$6200.$$

EJEMPLO 8.8. En cierta región, la probabilidad de que ocurra una tormenta con truenos en un día cualquiera durante dos meses de verano es igual a 0.1. Suponiendo la independencia de un día con otro, ¿cuál es la probabilidad de que la primera tormenta con truenos del verano ocurra el día 3 del segundo mes?

Hagamos X el número de días (empezando el 1 del primer mes hasta la primera tormenta y buscamos $P(X = 34)$, la cual es igual a $(0.9)^{33}(0.1) = 0.003$.

EJEMPLO 8.9. Si la probabilidad de que cierto examen dé una reacción "positiva" igual a 0.4, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones "negativas" antes de la primera positiva? Haciendo que Y sea el número de reacciones negativas antes de la primera positiva, tenemos

$$P(Y = k) = (0.6)^k(0.4), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Luego,

$$P(Y < 5) = \sum_{k=0}^{4}(0.6)^k(0.4) = 0.92.$$

Observación: Si X tiene una distribución geométrica como la descrita en la ecuación (8.5) y si hacemos $Z = X - 1$, podemos interpretar a Z como el número de fallas que preceden al primer éxito. Tenemos que $P(Z = k) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde $p = P(\text{éxito})$ y $q = P(\text{falla})$.

La distribución geométrica tiene una propiedad interesante que se resume en el teorema siguiente.

Teorema 8.4. Supóngase que X tiene una distribución geométrica dada por la ecuación (8.5). Entonces para dos enteros positivos cualesquiera s y t,

$$P(X \geq s + t \mid X > s) = P(X \geq t). \tag{8.6}$$

Demostración: Véase el problema 8.18.

Observaciones: a) El teorema anterior indica que la distribución geométrica "no tiene memoria" en el sentido siguiente. Supongamos que el evento A *no* ha ocurrido durante las primeras repeticiones de ε. Entonces, la probabilidad de que no ocurra durante las *próximas* t repeticiones es la misma que la probabilidad de que no ocurra durante las *primeras* t repeticiones. En otras palabras, la información de ningún éxito es "olvidada" en lo que se refiere a cálculos subsecuentes.

b) El recíproco del teorema anterior también es cierto: si la ecuación (8.6) es válida para una variable aleatoria que toma sólo valores positivos, entonces la variable aleatoria *debe* tener una distribución geométrica. (No demostraremos esto aquí. Se puede encontrar tal exposición en *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, de Feller, John Wiley and Sons, Inc., 2a. ed., Nueva York, 1957, pág. 304.)

c) En el capítulo siguiente observemos que existe una variable aleatoria continua con una distribución que posee una propiedad análoga a la ecuación (8.6), es decir, la distribución exponencial.

EJEMPLO 8.10. Supongamos que un mecanismo se inspecciona al finalizar cada día para ver si aún funciona adecuadamente. Sea $p = P$ [falla durante cualquier día dado]. Por tanto, si X es el número de inspecciones necesarias para obtener la primera falla, X tiene una distribución de probabilidad geométrica y tenemos $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$. De igual manera, $(1 - p)^{n-1}p = P$[el artículo se encontrará que ha fallado en la n-ésima inspección y no en la $(n - 1)$-ésima inspección].

El valor máximo de esta probabilidad se obtiene resolviendo

$$\frac{d}{dp}P(X = n) = 0.$$

Esto da

$$p(n - 1)(1 - p)^{n-2}(-1) + (1 - p)^{n-1} = 0,$$

lo que equivale a

$$(1-p)^{n-2}[(1-p)-(n-1)p]=0,$$

de la cual obtenemos $p=1/n$.

8.5 La distribución de Pascal

Si planteamos la siguiente cuestión, surge una generalización obvia de la distribución geométrica. Supongamos que un experimento se continúa hasta que un evento particular A ocurre por r-ésima vez. Si

$$P(A)=p, \quad P(A^c)=q=1-p$$

en cada una de las repeticiones, definimos la variable aleatoria Y como sigue.

Y es el número de repeticiones necesarias para que A ocurra exactamente r veces.

Necesitamos la distribución de probabilidades de Y. Debe ser evidente que si $r=1$, Y tiene la distribución geométrica dada por la ecuación (8.5).

Ahora $Y=k$ si y sólo si A ocurre en la k-ésima repetición y precisamente A ocurrió $(r-1)$ veces en las $(k-1)$ repeticiones previas. La probabilidad de este evento es simplemente $p\binom{k-1}{r-1}p^{r-1}q^{k-r}$, puesto que lo que sucede en las primeras $(k-1)$ repeticiones es independiente de lo que sucede en la k-ésima repetición.

Luego,

$$P(Y=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r}, \quad k=r,r+1,\cdots \tag{8.7}$$

Es muy sencillo ver que para $r=1$, lo anterior se reduce a la ecuación (8.5). Una variable aleatoria que tenga una distribución de probabilidades dada por la ecuación (8.7) tiene una distribución de *Pascal*.

Observación: La distribución de Pascal también se conoce como distribución *binomial negativa*. La razón de esto es que al verificar la condición

$$\sum_{k=r}^{\infty} P(Y=k)=1$$

obtenemos

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = p^r \sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} = p^r (1-q)^{-r},$$

lo cual obviamente es igual a 1. La última igualdad del desarrollo en serie de

$$(1-q)^{-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-r}{n} (-q)^n,$$

que es igual a

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} q^{k-r}$$

después de algunas simplificaciones algebraicas y recordando la definición del coeficiente binomial (generalizado) (ver la Observación antes del Ej. 2.7). Debido al exponente negativo $(-r)$ en la expresión anterior, esta distribución se llama distribución binomial negativa. Para calcular $E(Y)$ y $V(Y)$ podemos proceder directamente, tratando de calcular las diversas sumas, o bien podemos proceder de la siguiente manera.

Sean

Z_1 = número de repeticiones necesarias hasta incluir la primera ocurrencia de A.

Z_2 = número de repeticiones necesarias entre la primera ocurrencia de A hasta incluir la segunda ocurrencia de A.

$\vdots$

Z_r = número de repeticiones necesarias entre la $(r-1)$ ocurrencia hasta incluir la r-ésima de A.

Así vemos que todas las Z_i son variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene una distribución geométrica. También, $Y = Z_1 + \cdots + Z_r$. Por tanto, usando el teorema 8.3, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8.5. Si Y tiene una distribución de Pascal dada por la ecuación (8.7), entonces,

$$E(Y) = r/p, \quad V(Y) = rq/p^2. \tag{8.8}$$

EJEMPLO 8.11. La probabilidad de que un experimento sea exitoso es 0.8. Si el experimento se repite hasta que ocurran cuatro resultados

exitosos, ¿cuál es el número esperado de repeticiones necesarias? De lo anterior, tenemos E (número de repeticiones) = 4/0.8 = 5.

8.6 Relación entre las distribuciones binomial y de Pascal

Sea X una distribución binomial con parámetros n y p (es decir, X = número de éxitos en n ensayos de Bernoulli con $P(\text{éxito}) = p$). Sea Y una distribución de Pascal con parámetros r y p (es decir, Y = número de ensayos de Bernoulli necesarios para obtener r éxitos con $P(\text{éxito}) = p$). Por tanto, se establece la siguiente relación:

$$a)\ P(Y \leq n) = P(X \geq r),$$
$$b)\ P(Y > n) = P(X < r).$$

Demostración: *a*) Si hay r o más éxitos en los primeros n ensayos, entonces es necesario n o menos ensayos para obtener los primeros r éxitos.

b) Si hay menos que r éxitos en los primeros n ensayos, entonces se necesitan más de n ensayos para obtener r éxitos.

Observaciones: *a*) las propiedades anteriores hacen posible el empleo de la distribución binomial tabulada para evaluar probabilidades asociadas con la distribución de Pascal. Por ejemplo, supóngase que deseamos calcular la probabilidad de que más de diez repeticiones sean necesarias para obtener el tercer éxito cuando $p = P(\text{éxito}) = 0.2$. Tenemos, usando la notación anterior para X y Y,

$$P(Y > 10) = P(X < 3) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} (0.2)^k (0.8)^{10-k} = 0.678$$

(de la tabla del Apéndice).

b) Comparemos en forma breve las distribuciones binomial y de Pascal. En cada uno de los casos, nos interesan los ensayos repetidos de Bernoulli. La distribución binomial aparece cuando consideramos un número fijo (digamos n) de tales ensayos y estamos interesados en el número de éxitos que ocurren. La distribución de Pascal se encuentra cuando prefijamos el número de éxitos que debemos obtener y luego anotamos el número de ensayos de Bernoulli necesarios Esto es particularmente útil para el problema estadístico que presentaremos con mayor detalle más adelante (Véase el Ej. 14.1).

8.7 La distribución hipergeométrica

Supóngase que tenemos un lote de N artículos, de los cuales r son defectuosos y $(N - r)$ son no defectuosos. Supóngase que escogemos al azar n artículos del lote ($n \leq N$), sin reposición. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados. Puesto que $X = k$ si y sólo si obtenemos exactamente k artículos defectuosos (de los r defectuosos del lote) y exactamente $(n-k)$ no defectuosos [de los $(N-r)$ no defectuosos del lote], tenemos

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.9}$$

Se dice que una variable aleatoria discreta que tiene la distribución de probabilidades de la ecuación (8.9) tiene una *distribución hipergeométrica*.

Observación: Puesto que $\binom{a}{b} = 0$ cada vez que $b > a$, si a y b son enteros no negativos podemos definir las probabilidades anteriores para toda $k = 0, 1, 2, \ldots$ Obviamente no podemos obtener más que r defectuosos, pero la probabilidad cero será asignada en ese evento según la ecuación (8.9).

EJEMPLO 8.12. Se embarcan motores eléctricos pequeños en lotes de 50. Antes que aceptar tal cargamento, un inspector elige 5 motores y los inspecciona. Si ninguno de ellos es defectuoso, el lote se acepta. Si se encuentra que uno o más son defectuosos, se inspecciona el cargamento completo. Supongamos que en realidad hay tres motores defectuosos en el lote. ¿Cuál es la probabilidad de que se requiera una inspección del 100%.

Si hacemos que X sea el número de motores defectuosos encontrados, se necesitará una inspección del 100% si y sólo si $X \geq 1$. Luego,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.28.$$

Teorema 8.6. Sean X una distribución hipergeométrica dada por la ecuación (8.9) y $p = r/N$, $q = 1 - p$. Entonces tenemos

$$a)\ E(X) = np;$$

$$b)\ V(X) = npq\frac{N-n}{N-1};$$

$$c)\ P(X = k) \simeq \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

Para N grande.

Demostración: Dejaremos al lector los detalles de la demostración. (Véase el Prob. 8.19.)

Observación: La propiedad *c*) del teorema 8.6 establece que si el tamaño N del lote es suficientemente grande, la distribución de X puede ser aproximada por la distribución binomial. Esto es razonablemente intuitivo. La distribución binomial se aplica cuando muestreamos *con* sustitución (puesto que en ese caso la probabilidad de obtener un artículo defectuoso permanece constante), mientras que la distribución hipergeométrica se aplica cuando muestreamos sin sustitución. Si el tamaño del lote es grande, no hay gran diferencia si un artículo en particular se devuelve o no al lote antes de escoger el siguiente. La propiedad *c*) del teorema 8.6 es simplemente una expresión matemática de ese hecho. Nótese también que el valor esperado de una variable aleatoria hipergeométrica X es el mismo que el de la variable aleatoria correspondiente distribuida binomialmente, mientras que la varianza de X es un poco más pequeña que la correspondiente en el caso binomial. El "término de corrección" $(N-n)/(N-1)$ es aproximadamente igual a 1, para un N grande.

Podemos ilustrar el significado de *c*) con el siguiente ejemplo sencillo. Supóngase que queremos evaluar $P(X = 0)$.

Para $n = 1$ obtenemos, de la distribución hipergeométrica, $P(X = 0) = (N-r)/N = 1 - r/N = q$. De la distribución binomial obtenemos directamente $P(X = 0) = q$. Por tanto estas respuestas son las mismas, como deberían ser en efecto, para $n = 1$.

Para $n = 2$ obtenemos de la distribución hipergeométrica,

$$P(X = 0) = \frac{N-r}{N}\frac{N-r-1}{N-1} = \left(1 - \frac{r}{N}\right)\left(1 - \frac{r}{N-1}\right).$$

De la distribución binomial obtenemos $P(X = 0) = q^2$. Debe observarse que $(1 - r/N) = q$, mientras que $[1 - r/(N-1)]$ es casi igual a q.

En general, la aproximación de la distribución hipergeométrica mediante la distribución binomial es muy buena si $n/N \leq 0.1$.

8.8 La distribución multinomial

Finalmente consideremos una variable aleatoria discreta importante de mayor dimensión que se puede concebir como una generalización de la distribución binomial. Consideremos un experimento ε, su espacio muestral S y una partición de S en k eventos mutuamente excluyentes $A_1, \ldots, A_k$. (Es decir, cuando se efectúa ε uno y sólo uno de los eventos A_i ocurre.) Considérese n repeticiones independientes de ε. Sea $p_i = P(A_i)$ y supóngase que p_i permanece constante durante todas las repeticiones. Desde luego tenemos $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Definamos las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$ como sigue.

X_i es el número de veces que A_i ocurre entre las n repeticiones de ε, $i = 1, \ldots, k$.

Las X_i no son variables aleatorias independientes, puesto que $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$. Entonces, tan pronto como el valor de cualquiera de las $(k-1)$ variables aleatorias es conocido, se determina el valor de la otra. Tenemos el resultado siguiente.

Teorema 8.7. Si X_i, $i = 2, \ldots, k$ están definidas como antes, tenemos

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \quad (8.10)$$

donde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Demostración: El argumento es idéntico al utilizado para establecer las probabilidades binomiales. Simplemente debemos observar que el número de maneras de agrupar n objetos, n_1 de los cuales son de una clase, n_2 de los cuales son de una segunda clase, $\ldots$, n_k de los cuales son de una k-ésima clase, está dado por

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}.$$

Observaciones: a) Si $k = 2$, lo anterior se reduce a la distribución binomial. En este caso designamos los dos eventos posibles con "éxito" y "fracaso".

b) La distribución anterior se conoce como *distribución multinomial de probabilidades*. Recordemos que los términos de la distribución binomial se obtuvieron del desarrollo de la expresión binomial $[p + (1 - p)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$. De manera análoga, las probabilidades anteriores pueden obtenerse de un desarrollo de la expresión multinomial $(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n$.

Teorema 8.8. Supóngase que $(X_1, \ldots, X_k)$ tiene una distribución binomial dada por la ecuación (8.10). Entonces,

$$E(X_i) = np_i \quad \text{y} \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Demostración: Ésta es una consecuencia inmediata de la observación que cada X_i, como se definió anteriormente, tiene una distribución binomial con probabilidades de éxito (es decir, la ocurrencia de A_i) igual a p_i.

EJEMPLO 8.13. Se fabrica una barra de un largo específico. Supóngase que el largo verdadero X (en pulgadas) es una variable aleatoria distribuida uniformemente en [10, 12]. Supóngase que sólo nos interesa saber si ha ocurrido uno de los tres eventos siguientes:

$$A_1 = \{X < 10.5\}, \quad A_2 = \{10.5 \leq X \leq 11.8\} \quad \text{y} \quad A_3 = \{X > 11.8\}.$$

Tenemos

$$p_1 = P(A_1) = 0.25, \quad p_2 = P(A_2) = 0.65 \quad \text{y} \quad p_3 = P(A_3) = 0.1.$$

Así, si se fabrican 10 de tales barras, la probabilidad de obtener exactamente 5 barras de longitud menor que 10.5 pulgadas y exactamente 2 de longitud mayor que 11.8 pulgadas está dada por

$$\frac{10!}{5!3!2!}(0.25)^5(0.65)^3(0.1)^2.$$

PROBLEMAS

8.1. Si X tiene una distribución de Poisson con parámetro β y si $P(X = 0) = 0.2$, calcular $P(X > 2)$.

8.2. Supóngase que X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ.Encontrar el valor de k para el cual $P(X = k)$ es la mayor. [*Indicación:* Comparar $P(X = k)$ con $P(X = k - 1)$.]

8.3. (Este problema se tomó de *Probability and Statistical Inference for Engineers* por Derman y Klein, Oxford University Press, Londres, 1959.) El número de buques tanque digamos N, que llegan cada día a cierta refinería tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 2$. Las actuales instalaciones portuarias pueden despachar tres buques al día. Si más de tres buques–tanque llegan en un día, los restantes deben enviarse a otro puerto.

a) En un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de tener que hacer salir buques–tanque?

b) ¿En cuánto deben aumentar las instalaciones actuales para permitir la atención a todos los buques–tanque aproximadamente el 90% de los días?

c) ¿Cuál es el número esperado de buques–tanque que llegan al día?

d) ¿Cuál es el número más probable de buques–tanque que llegan diariamente?

e) ¿Cuál es el número esperado de buques–tanque que se atienden diariamente?

f) ¿Cuál es el número esperado de buques–tanque devueltos diariamente?

8.4. Suponer que la probabilidad de que un artículo producido por una máquina especial sea defectuoso es igual a 0.2. Si 10 artículos se seleccionan al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no se encuentre más de un artículo defectuoso? Usar las distribuciones binomial y de Poisson y comparar las respuestas.

8.5. Una compañía de seguros ha descubierto que sólo alrededor del 0.1% de la población tiene cierto tipo de accidente cada año. Si los 10 000 asegurados fueran seleccionados aleatoriamente en la población, ¿cuál será la probabilidad de que no más de 5 de estos clientes tenga un accidente de ese tipo el próximo año?

8.6. Supóngase que X tiene una distribución de Poisson. Si

$$P(X = 2) = \tfrac{2}{3}P(X = 1),$$

calcular $P(X = 0)$ y $P(X = 3)$.

8.7. Un proveedor de películas produce al año 10 rollos de película especialmente sensible. La película debe descartarse si no se vende dentro del año. Experiencias anteriores indican que D, la demanda (pequeña) para la película es una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro 8. Si se obtiene una utilidad de \$7 en cada rollo vendido, mientras que ocurre una pérdida de \$3 en cada rollo que debe ser descartado, calcular la utilidad esperada que el fabricante puede obtener con los 10 rollos que produce.

8.8. Supóngase que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de tales partículas emitidas durante el periodo de una hora tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Se emplea un instrumento para contar y anotar el número de las partículas emitidas. Si más de 30 partículas llegan durante cualquier periodo de una hora, el instrumento que anota es incapaz de controlar el exceso y simplemente anota 30. Si Y es la variable aleatoria definida como el número de partículas *anotadas* por el instrumento que cuenta, obtener la distribución de probabilidades de Y.

8.9. Supóngase que una fuente radiactiva emite partículas y que el número de las que se emiten durante un periodo de una hora tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Consideremos que el instrumento para contar esas emisiones en ocasiones falla al anotar una partícula emitida. Supóngase específicamente que cualquier partícula emitida tiene una probabilidad p de ser anotada.

a) Si Y está definida como el número de partículas anotadas, ¿cuál es una expresión para la distribución de probabilidades de Y?
b) Calcular $P(Y = 0)$ si $\lambda = 4$ y $p = 0.9$.

8.10. Suponer que un depósito contiene 10 000 partículas. La probabilidad de que una de esas partículas salga del depósito es igual a 0.0004. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran más de 5 salidas? (Puede suponerse que las diversas salidas son independientes unas de otras.)

8.11. Supóngase que un libro de 585 páginas contiene 43 errores tipográficos. Si esos errores están distribuidos aleatoriamente a lo largo del libro, ¿cuál es la probabilidad de que 10 páginas seleccionadas al azar estén libres de errores? [Sugerencia: Suponer que X = número de errores por página tiene una distribución de Poisson.]

8.12. Una fuente radiactiva se observa durante 7 intervalos cada uno de 10 segundos de duración y se cuenta el número de partículas emitidas durante cada periodo. Suponer que el número de partículas emitidas, digamos X, durante cada periodo observado tiene una distribución de Poisson con parámetro 5.0 (es decir, las partículas se emiten a razón de 0.5 partículas por segundo).

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en cada uno de los 7 intervalos de tiempo, se emitan 4 o más partículas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos en uno de los 7 intervalos de tiempo se emitan 4 o más partículas?

8.13. Se ha encontrado que el número de fallas de transistores en un computador electrónico en cualquier periodo de una hora se puede considerar como una variable aleatoria que tiene una distribución de Poisson con parámetro 0.1 (es decir, en promedio hay una falla de un transistor cada 10 horas). Se inicia cierto proceso que necesita 20 horas de tiempo de cómputo.

a) Encontrar la probabilidad de que el proceso anterior pueda completarse exitosamente sin una falla. (Se supone que la máquina se considera inoperante sólo si fallan 3 o más transistores.)

b) Lo mismo que en *a*), excepto que la máquina se considera inoperante si fallan 2 o más transistores.

8.14. Al formar números binarios con n dígitos, la probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es, digamos, 0.002. Si los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de encontrar cero, uno o más de un dígito incorrecto en un número binario de 25 dígitos? Si el computador forma 10^6 de tales números de 25 dígitos por segundo, ¿cuál es la probabilidad de que se forme un número incorrecto durante cualquier periodo de un segundo?

8.15. Cada semana se emplean dos procedimientos independientes en la operación de lanzamiento de cohetes. Supóngase que cada *uno* de los procedimientos se continúa hasta que se produce un lanzamiento exitoso. Se supone que al usar el procedimiento I, $P(S)$, la probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual a p_1, mientras que para el procedimiento II, $P(S) = p_2$. Además, se supone que cada semana se hace un intento con cada uno de los dos métodos. Representar con X_1 y X_2 el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso por medio de I y II, respectivamente. (Luego, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes, cada una con distribución geométrica.) Sea W el mínimo (X_1, X_2) y sea Z el máximo (X_1, X_2). Por tanto, W representa el número de semanas necesarias para obtener un lanzamiento exitoso, mientras que Z representa el número de semanas necesarias para obtener lanzamientos exitosos con ambos procedimientos. (Entonces si el procedimiento I da como resultado $\overline{SSSS}$, mientras que el procedimiento II da como resultado $\overline{SS}S$, tenemos $W = 3$ y $Z = 4$.)

a) Obtener una expresión para la distribución de probabilidades de W. [*Indicación*: Expresar, en términos de X_1 y X_2, el evento $\{W = k\}$.]

b) Obtener una expresión para la distribución de probabilidades de Z.

c) Escribir nuevamente las expresiones anteriores si $p_1 = p_2$.

8.16. Se arman cuatro componentes en un solo aparato. Los componentes originan fuentes independientes y $Pi = P(i$–ésimo componente es defectuoso), $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Obtener una expresión de la probabilidad para que el aparato completo funcione.

b) Obtener una expresión de la probabilidad para que al menos tres componentes funcionen.

c) Si $p_1 = p_2 = 0.1$ y $p_3 = p_4 = 0.2$, calcular la probabilidad de que funcionen exactamente dos componentes.

8.17. Un mecánico mantiene un gran número de arandelas en un depósito. El 50% de éstas son de $\frac{1}{4}$ pulgada de diámetro, el 30% de $\frac{1}{8}$ pulgada de diámetro

y el 20% restante de $\frac{3}{8}$ pulgada de diámetro. Se supone que se eligen al azar diez arandelas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente cinco arandelas de $\frac{1}{4}$ pulgada, cuatro de $\frac{1}{8}$ de pulgada y una de $\frac{3}{8}$ de pulgada?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo haya dos clases de arandelas entre las elegidas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres clases de arandelas estén entre las elegidas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tres de una clase, tres de otra clase y cuatro de la tercera clase en una muestra de 10?

8.18. Demostrar el teorema 8.4.

8.19. Demostrar el teorema 8.6.

8.20. El número de partículas emitidas por una fuente radioactiva durante un periodo específico es una variable aleatoria con una distribución de Poisson. Si la probabilidad de ninguna emisión es igual a $\frac{1}{3}$, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran 2 o más emisiones?

8.21. Supóngase que X_t, el número de partículas emitidas en t horas por una fuente radiactiva, tiene una distribución de Poisson con parámetro $20t$. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 5 partículas sean emitidas durante un periodo de 15 minutos?

8.22. La probabilidad de que el lanzamiento de un cohete sea exitoso es igual a 0.8. Supóngase que se hacen ensayos hasta que ocurren 3 lanzamientos exitosos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios 6 intentos? ¿Cuál es la probabilidad de que sean necesarios menos de 6 intentos?

8.23. En la situación descrita en el problema 8.22 suponer que los ensayos de lanzamiento se hacen hasta que ocurren tres lanzamientos *consecutivos* exitosos. Responder las preguntas formuladas en el problema previo en este caso.

8.24. Considérese nuevamente la situación descrita en el problema 8.22. Supóngase que cada uno de los ensayos de lanzamiento cuesta \$5 000. Además, un lanzamiento que fracasa produce un costo adicional de \$500. Calcular el costo esperado para la situación descrita.

8.25. Con X y Y definidas como en la sección 8.6, probar o refutar lo siguiente:

$$P(Y < n) = P(X > r).$$

9

Algunas variables aleatorias continuas importantes

9.1 Introducción

En este capítulo proseguiremos la tarea que nos planteamos en el capítulo 8, y estudiaremos con detalle diversas variables aleatorias continuas importantes y sus características. Como señalamos antes, muchos problemas se hacen matemáticamente más sencillos al considerar un recorrido "idealizado" para una variable aleatoria X, en el cual *todos* los números reales posibles (en algún intervalo específico o conjuntos de intervalos) pueden considerarse como resultados posibles. De esta manera llegamos a las variables aleatorias continuas. Muchas de las variables aleatorias que ahora presentaremos tienen aplicaciones importantes y diferiremos hasta un capítulo posterior la exposición de algunas de sus aplicaciones.

9.2 La distribución normal

Una de las variables aleatorias continuas más notables es la siguiente.

Definición. La variable aleatoria X, que toma todos los valores reales, $-\infty < x < \infty$, tiene una distribución *normal (o gaussiana)* si su fdp es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right), \quad -\infty < x < \infty. \tag{9.1}$$

Los parámetros μ y σ deben satisfacer las condiciones $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Puesto que tendremos diversas ocasiones para referirnos a la distribución anterior, utilizaremos la notación siguiente: X tiene la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ si y sólo si su distribución de probabilidades está dada por la ecuación (9.1). [Con frecuencia usamos la notación $\exp(t)$ para representar e^t.]

Será hasta el capítulo 12 donde se exponga el porqué de la gran importancia de esta distribución. Ahora simplemente indicaremos que *la distribución normal sirve como una aproximación excelente a una gran cantidad de distribuciones* que tienen importancia práctica. Aún más, esta distribución tiene varias propiedades matemáticas apreciables que hacen posible deducir resultados teóricos notables.

9.3 Propiedades de la distribución normal

a) Comprobemos que f es una fdp legítima. Evidentemente $f(x) \geq 0$. Además debemos verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$. Notemos que si $t = (x-\mu)/\sigma$, podemos escribir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ como $(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = I$.

El "truco" utilizado para evaluar esta integral (y esto *es* un truco) es considerar, en ves de I, el cuadrado de esta integral, llamada I^2. Así,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s^2+t^2)/2}\, ds\, dt\,.$$

Introduzcamos coordenadas polares para evaluar esta integral doble:

$$s = r\cos\alpha, \quad t = r\,\text{sen}\,\alpha.$$

Luego, el elemento de área $ds\, dt$ se transforma en $r\, dr\, d\alpha$. Como s y t varían entre $-\infty$ y $+\infty$, r varía entre 0 y ∞, mientras que α varía entre 0 y 2π. Así,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,dr\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -e^{-r^2/2}\,|_0^{\infty}\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha = 1$$

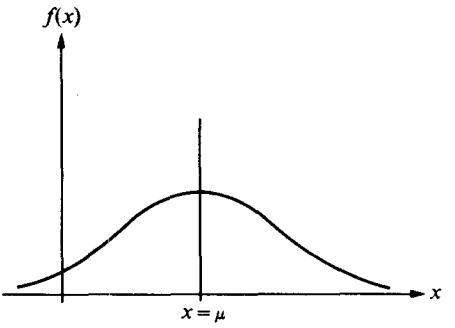


FIGURA 9.1

Por lo tanto, $I = 1$ como se iba a demostrar.

b) Consideremos la forma de la gráfica de f. Tiene la muy conocida forma de campana que se muestra en la figura 9.1 Puesto que f depende sólo de x mediante la expresión $(x-\mu)^2$, es evidente que la gráfica de f será *simétrica*, respecto a μ. Por ejemplo, si $x = \mu + 2$, $(x-\mu)^2 = (\mu+2-\mu)^2 = 4$, mientras que para $x = \mu - 2$, $(x-\mu)^2 = (\mu-2-\mu)^2 = 4$ también.

El parámetro σ puede interpretarse en forma geométrica. Observemos que para $x = \mu$ la gráfica de f es cóncava hacia abajo. Cuando $x \to \pm\infty, f(x) \to 0$, asintóticamente. Puesto que $f(x) \geq 0$ para todo x, esto significa que para grandes valores de x (positivos o negativos), la gráfica de f es cóncava hacia arriba. El punto en el cual cambia la concavidad se llama punto de inflexión y se determina al resolver la ecuación $f''(x) = 0$. Cuando hacemos esto, encontramos que los puntos de inflexión ocurren en $x = \mu \pm \sigma$. Esto es, σ unidades a la derecha y a la izquierda de μ, la gráfica de f cambia de concavidad. Así, si σ es relativamente grande, la gráfica de f tiende a ser "achatada", mientras que si σ es pequeña la gráfica de f tiende a ser muy "aguzada".

c) Además de la interpretación geométrica de los parámetros μ y σ, el siguiente significado probabilístico o importante puede asociarse con esas cantidades. Considérese

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx\,.$$

Haciendo $z = (x-\mu)/\sigma$ y observando que $dx = \sigma\,dz$, obtenemos

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu) e^{-z^2/2}\, dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2}\, dz + \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz.$$

La primera de las integrales anteriores es igual a cero puesto que el integrando, llamémoslo $g(z)$, tiene la propiedad de que $g(z) = -g(-z)$ y, por lo tanto, g es una función impar. La segunda integral (sin el factor μ) representa el área total bajo la fdp normal y, por lo tanto, es igual a la unidad. Luego, $E(X) = \mu$.

A continuación consideremos

$$E(X)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx\,.$$

Haciendo nuevamente, $z = (x - \mu)/\sigma$, obtenemos

$$E(X)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma z + \mu)^2 e^{-z^2/2}\, dz$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 e^{-z^2/2}\, dz + 2\mu\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-z^2/2}\, dz$$
$$+ \mu^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Nuevamente, la segunda integral es igual a cero por el argumento antes usado. La última integral (sin el factor μ^2) es igual a la unidad. Para calcular $(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz$, integramos por partes haciendo $ze^{-z^2/2} = dv$ y $z = u$. Luego, $v = -e^{-z^2/2}$, mientras que $dz = du$. Se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-z^2/2}\, dz = \frac{-ze^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 0 + 1 = 1.$$

Luego $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$, por tanto, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2$. *Así encontramos que los dos parámetros μ^2 y σ^2, que caracterizan la distribución normal son la esperanza y la varianza de X, respectivamente.* Para decirlo con otras palabras si sabemos que X está distribuido normalmente, sólo

sabemos que su distribución de probabilidades es de cierto tipo (o pertenece a cierta familia). Si además conocemos $E(X)$ y $V(X)$, la distribución de X está especificada por completo. Como mencionamos antes, la gráfica de la fdp de una variable aleatoria distribuida normalmente es simétrica respecto a μ. El achatamiento de la gráfica se determina por σ^2, puesto que si X tiene una distribución $N(\mu, \sigma_1^2)$ y Y tiene distribución $N(\mu, \sigma_2^2)$, donde $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, entonces sus fdp tendrían las formas *relativas* que se muestran en la figura 9.2.

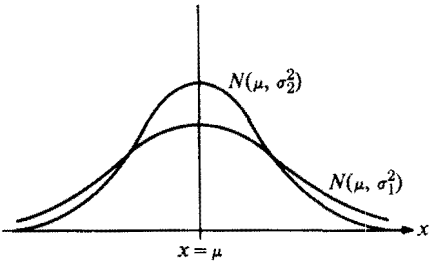


FIGURA 9.2

d) Si X tiene una distribución $N(0,1)$ decimos que X tiene una distribución *normal estandarizada*. Esto es, la fdp de X puede escribirse como

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{9.2}$$

(Usaremos la letra φ sólo para la fdp de la variable aleatoria X anterior.) La importancia de la distribución normal estandarizada se debe al hecho de que está *tabulada*. Cada vez que X tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ siempre podemos obtener la forma estandarizada tomando simplemente una función *lineal* de X, como lo indica el teorema siguiente.

Teorema 9.1. Si X tiene la distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y si $Y = aX + b$, entonces Y tiene la distribución $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Demostración: El hecho de que $E(Y) = a\mu + b$ y que $V(Y) = a^2\sigma^2$ se deduce en forma inmediata de las propiedades de la esperanza y la varianza expuestas en el capítulo 7. Para demostrar que de hecho Y está distribuida normalmente, podemos aplicar el teorema 5.1, puesto

que $aX + b$ es una función de X decreciente o creciente, dependiendo del signo de a. Luego, si g es la fdp de Y, tenemos

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{y-b}{a} - \mu\right]^2\right)\left|\frac{1}{a}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\,|a|} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 a^2}[y - (a\mu + b)]^2\right),$$

que representa la fdp de una variable aleatoria con distribución $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Corolario: Si X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y si $Y = (X - \mu)/\sigma$, entonces Y tiene distribución $N(0, 1)$.

Demostración: Es evidente que Y es una función lineal de X y, por tanto, se aplica al teorema 9.1.

Observación: La importancia de este corolario es que al *cambiar las unidades* en las cuales se mide la variable podemos obtener la distribución estandarizada (véase *d*). Al hacer esto, obtenemos una distribución con parámetros no especificados, lo cual es una situación muy propicia desde el punto de vista de la tabulación de la distribución (véase la próxima sección).

9.4 Tabulación de la distribución normal

Supóngase que X tiene distribución $N(0, 1)$. Luego,

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx.$$

Esta integral no puede evaluarse por métodos ordinarios. (La dificultad proviene del hecho de que no podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, puesto que no podemos encontrar una función cuya derivada sea igual a $e^{-x^2/2}$.) Sin embargo, los métodos de integración numérica pueden usarse para evaluar integrales de la forma anterior, y de hecho $P(X \leq s)$ ha sido *tabulado*.

La fda de la distribución normal estandarizada se denotará consistentemente con Φ. Esto es,

$$\phi(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2}\,dx. \tag{9.3}$$

(Véase la Fig. 9.3.) La función Φ se ha tabulado con amplitud, y en el Apéndice se proporciona un extracto de dicha tabla. Podemos usar ahora la tabulación de la función Φ con el objeto de evaluar $P(a \leq X \leq b)$, donde X tiene la distribución estandarizada $N(0,1)$, puesto que

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

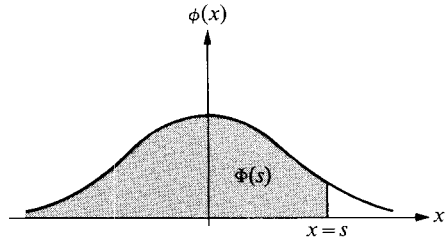


FIGURA 9.3

La importancia particular de la tabulación anterior se debe al hecho de que si X tiene *cualquier* distribución normal $N(\mu,\sigma^2)$, la función tabulada Φ puede usarse para evaluar probabilidades asociadas con X.

Simplemente usamos el teorema 9.1 para observar que si X tiene distribución $N(\mu,\sigma^2)$, entonces $Y = (X - \mu)/\sigma$ tiene distribución $N(0,1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \tag{9.4}$$

De la definición de Φ (véase la Fig. 9.3) también es evidente que

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \tag{9.5}$$

Esta relación es muy útil, pues en la mayoría de las tablas, la función Φ sólo se tabula para valores positivos de x.

Finalmente calculemos $P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma)$, donde X tiene distribución $N(\mu,\sigma^2)$. La probabilidad anterior se puede expresar en t términos de la función Φ escribiendo

$$\begin{aligned} P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) &= P\left(-k \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq k\right) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k). \end{aligned}$$

Usando la ecuación (9.5) para $k > 0$ tenemos,

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma) = 2\Phi(k) - 1. \tag{9.6}$$

Nótese que la probabilidad anterior es independiente de μ y σ. En palabras, la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$ tome valores dentro de k desviaciones estándar del valor esperado depende sólo de k y está dado por la ecuación (9.6).

Observación: Tendremos diversas ocasiones para referirnos a "funciones tabuladas". En un sentido dado, cuando una expresión puede escribirse en términos de funciones tabuladas, el problema está "resuelto". (Con la disponibilidad de medios modernos de computación, muchas funciones que no son tabuladas pueden evaluarse fácilmente. Aunque no esperamos que todos tengan fácil acceso a un computador, no parece ilógico suponer que ciertas tablas comunes están disponibles.) Así, nos deberíamos sentir tan cómodos con la función $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\, ds$ como con la función $f(x) = \sqrt{x}$. Ambas funciones están tabuladas, y en algunos casos podríamos tener alguna dificultad para calcular directamente la función para $x = 0.43$, por ejemplo. En el Apéndice aparecen varias tablas de algunas de las funciones más importantes que encontraremos en nuestro trabajo. Ocasionalmente se harán referencias a otras tablas no incluidas en este texto.

EJEMPLO 9.1. Supóngase que X tiene distribución $N(3, 4)$. Deseamos encontrar un número c tal que

$$P(X > c) = 2P(X \leq c).$$

Observemos que $(X - 3)/2$ tiene distribución $N(0, 1)$. Por tanto,

$$P(X > c) = P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{c-3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right).$$

También,

$$P(X \leq c) = P\left(\frac{X-3}{2} \leq \frac{c-3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right).$$

Por tanto, la condición anterior se puede escribir como $1 - \Phi[(c - 3)/2] = 2\Phi[(c - 3)/2]$. Esto se convierte en $\Phi[(c - 3)/2] = \frac{1}{3}$. De aquí (de la tabla de la distribución normal), encontramos que $(c - 3)/2 = -0.43$, obteniendo $c = 2.14$.

EJEMPLO 9.2. Supóngase que la resistencia a romperse de un género de algodón (en libras), llamémosle X, está distribuida normalmente con $E(X) = 165$ y $V(X) = 9$. Suponiendo además que una muestra de este género se considera defectuosa si $X < 162$, ¿cuál es la probabilidad de que un género elegido al azar sea defectuoso?

Debemos calcular $P(X < 162)$. Sin embargo,

$$P(X < 162) = P\left(\frac{X - 165}{3} < \frac{162 - 165}{3}\right)$$
$$= \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0.159 .$$

Observación: Una objeción inmediata al uso de la distribución normal puede encontrarse aquí. Es obvio que X, la resistencia del género de algodón, no puede tomar valores negativos, mientras que una variable aleatoria distribuida normalmente puede tomar todos los valores positivos y negativos. Sin embargo, el modelo anterior (en apariencia invalidado debido a las objeciones encontradas) asigna una probabilidad despreciable al evento $\{X < 0\}$. Esto es,

$$P(X < 0) = P\left(\frac{X - 165}{3} < \frac{0 - 165}{3}\right) = \Phi(-55) \simeq 0.$$

Esta situación ocurrirá con frecuencia: se supone que cierta variable aleatoria X, que sabemos no puede tomar valores negativos, tiene una distribución normal tomando así (teóricamente, al menos) valores tanto positivos como negativos. Mientras se escojan los parámetros μ y σ^2 de modo que $P(X < 0)$ sea esencialmente cero, tal representación es perfectamente válida.

El problema de encontrar la fdp de una función de una variable aleatoria, llamémosla $Y = H(X)$, como se expuso en el capítulo 5, aparece en el contexto presente en el cual la variable aleatoria X está distribuida normalmente.

EJEMPLO 9.3. Supóngase que el radio R de un cojinete de esferas está distribuido normalmente con valor esperado 1 y varianza 0.04. Encuentre la fdp del volumen del cojinete.

La fdp de la variable aleatoria R está dada por

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.2)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{r - 1}{0.2}\right]^2\right).$$

Puesto que V es una función de R monótonamente creciente, podemos aplicar en forma directa el teorema 5.1 para la fdp de $V = 4/3\pi R^3$ y obtener $g(v) = f(r)(dr/dv)$, donde r está expresado en todas partes en términos de v. De la relación anterior, obtenemos $r = \sqrt[3]{3v/4\pi}$. Luego, $dr/dv = (1/4\pi)(3v/4\pi)^{-2/3}$. Al sustituir esas expresiones en la ecuación anterior, obtenemos la fdp deseada de V.

EJEMPLO 9.4. Supóngase que X, el diámetro interior (en milímetros) de una tobera, es una variable aleatoria distribuida normalmente con esperanza μ y varianza 1. Si X no satisface ciertas especificaciones, le produce una pérdida al fabricante. Más exactamente, supóngase que la utilidad T (por tobera) es la siguiente función de X:

$$\begin{aligned} T &= C_1 \text{ (dólares)} \quad \text{si } 10 \leq X \leq 12, \\ &= -C_2 \quad \text{si } X < 10, \\ &= -C_3 \quad \text{si } X > 12. \end{aligned}$$

Por tanto, la utilidad esperada (por tobera) puede escribirse como

$$\begin{aligned} E(T) &= C_1[\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)] \\ &\qquad - C_2[\Phi(10-\mu)] - C_3[1 - \Phi(12-\mu)] \\ &= (C_1 + C_3)\Phi(12-\mu) - (C_1 + C_2)\Phi(10-\mu) - C_3. \end{aligned}$$

Supóngase que es posible ajustar el proceso de fabricación de modo que se puedan obtener diferentes valores de μ. ¿Para qué valor de μ es máxima la utilidad esperada? Debemos calcular $dE(T)/(d\mu)$ e igualarla a cero. Denotando como es usual, la fdp de la distribución $N(0,1)$ con φ, tenemos

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = (C_1 + C_3)\left[-\varphi'(12-\mu)\right] - (C_1 + C_2)\left[-\varphi'(10-\mu)\right].$$

Luego,

$$\begin{aligned} &-(C_1 + C_3)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}(12-\mu)^2\right) \\ &\qquad + (C_1 + C_2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac{1}{2}(10-\mu)^2\right) = 0. \end{aligned}$$

O

$$e^{22-2\mu} = \frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2}.$$

Así,

$$\mu = 11 - \tfrac{1}{2} \ln \left(\frac{C_1 + C_3}{C_1 + C_2} \right).$$

[Es fácil para el lector verificar que lo anterior da un valor máximo para $E(T)$.]

Observaciones: a) Si $C_2 = C_3$, es decir, si un diámetro X muy grande o muy pequeño, es un defecto igualmente serio, entonces el valor μ para el cual se obtiene el valor máximo de $E(T)$ es $\mu = 11$. Si $C_2 > C_3$, el valor de μ es > 11, mientras que si $C_2 < C_3$, el valor de μ es < 11. Cuando $\mu \to +\infty$, $E(T) \to -C_3$, mientras que si $\mu \to -\infty$, $E(T) \to -C_2$.

b) Considérense los valores de los costos siguientes: $C_1 = \$10$, $C_2 = \$3$ y $C_3 = \$2$. Entonces, el valor de μ para el cual $E(T)$ se maximiza es igual a $\mu = 11 - \frac{1}{2} \ln[\frac{12}{13}] = \$11.04$. Luego, el valor máximo obtenido por $E(T)$ es igual a \$6.04 por tobera.

9.5 La distribución exponencial

Definición. Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores no negativos tiene una *distribución exponencial* con parámetro $\alpha > 0$ si su fdp está dada por

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad x > 0$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} \tag{9.7}$$

(Véase la Fig. 9.4.) [Una integración inmediata indica que

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = 1$$

y, por tanto, la ecuación (9.7) representa un fdp.]

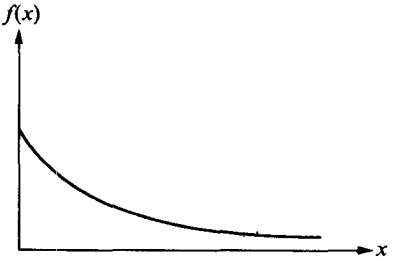


FIGURA 9.4

La distribución exponencial desempeña un papel importante en la descripción de una gran clase de fenómenos, especialmente en el área

de la teoría de la confiabilidad. Dedicaremos el capítulo 11 a algunas de estas aplicaciones. Por el momento, sólo investiguemos algunas de las propiedades de la distribución exponencial.

9.6 Propiedades de la distribución exponencial

a) La fda F de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\, dt = 1 - e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0 \tag{9.8}$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

[Por tanto, $P(X > x) = e^{-\alpha x}$.]

b) El valor esperado de X se obtiene como sigue:

$$E(X) = \int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x}\, dx\,.$$

Integrando por partes y haciendo $\alpha e^{-\alpha x}\, dx = dv$ y $x = u$, obtenemos $v = -e^{-\alpha x}$ y $du = dx$. Luego,

$$E(X) = \left[-xe^{-\alpha x}\right] \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}. \tag{9.9}$$

Así, el valor esperado es igual al recíproco del parámetro α. [Simplemente reclasificando el parámetro $\alpha = 1/\beta$, podríamos haber escrito la fdp de X como $f(x) = (1/\beta)e^{-x/\beta}$. De esta manera, el parámetro β es igual al valor esperado de X. Sin embargo, continuaremos usando la forma de la ecuación (9.7).]

c) La varianza de X puede obtenerse con una integración semejante. Encontramos que $E(X^2) = 2/\alpha^2$ y, por tanto,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{\alpha^2}. \tag{9.10}$$

d) La distribución exponencial tiene la siguiente propiedad importante, análoga a la ecuación (8.6) descrita para la distribución geométrica. Considerando para cualquier s, $t > 0$, $P(X > s + t \mid X > s)$. Tenemos

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(s+t)}}{e^{-\alpha s}} = e^{-\alpha t}.$$

Por tanto,

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t). \tag{9.11}$$

Así hemos demostrado que la distribución exponencial también tiene la propiedad de "no tener memoria" como la distribución geométrica. (Véase la Observación que sigue al teorema 8.4.) Hacemos un uso considerable de esta propiedad al aplicar la distribución exponencial a los modelos de fatiga en el capítulo 11.

Observación: Como en el caso de la distribución geométrica, la recíproca de la propiedad *d*) también es cierta. La única variable aleatoria continua X que toma valores no negativos, para los cuales $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$ para toda s, $t > 0$, es una variable aleatoria distribuida exponencialmente. [Aunque aquí no demostraremos esto, podría señalarse que la base del argumento implica el hecho de que la única función continua G que tiene la propiedad que $G(x+y) = G(x)G(y)$ para toda x, $y > 0$, es $G(x) = e^{-kx}$. Es fácil ver que si definimos $G(x) = 1 - F(x)$, donde F es la fda de X, luego G satisfará esta condición.]

EJEMPLO 9.5. Supóngase que un fusible tiene una duración X que puede considerarse como una variable aleatoria continua con una distribución exponencial. Hay dos procesos mediante los cuales se puede fabricar el fusible. El proceso I da una duración esperada de 100 horas (esto es, el parámetro es igual a 100^{-1}), mientras que el proceso II da una duración esperada de 150 horas (esto es, el parámetro es igual a 150^{-1}). Supóngase también que el proceso II es dos veces más costoso (por fusible) que el proceso I, el cual cuesta C dólares por fusible, y además que si un fusible dura menos de 200 horas se carga una pérdida de K dólares al fabricante. ¿Qué proceso se deberá usar? Calculemos el costo *esperado* para cada uno de los procesos. Para el proceso I tenemos

$$\begin{aligned} C_I = \text{costo (por fusible)} &= C \quad \text{si} \quad X > 200 \\ &= C + K \quad \text{si} \quad X \leq 200. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(C_I) &= CP(X > 200) + (C + K)P(X \leq 200) \\ &= Ce^{-(1/100)200} + (C + K)(1 - e^{-(1/100)200}) \\ &= Ce^{-2} + (C + K)(1 - e^{-2}) = K(1 - e^{-2}) + C. \end{aligned}$$

Con un cálculo semejante encontramos que

$$E(C_{II}) = K(1 - e^{-4/3}) + 2C.$$

Luego,

$$E(C_{II}) - E(C_I) = C + K(e^{-2} - e^{-4/3}) = C - 0.13K.$$

Por tanto, preferimos el proceso I con tal que $C > 0.13K$.

EJEMPLO 9.6. Supóngase que X tiene una distribución exponencial con parámetro α. Entonces $E(X) = 1/\alpha$. Calculemos la probabilidad de que X sobrepase su valor esperado (Fig. 9.5.) Tenemos

$$P\left(X > \frac{1}{\alpha}\right) = e^{-\alpha(1/\alpha)}$$

$$= e^{-1} < \tfrac{1}{2}.$$

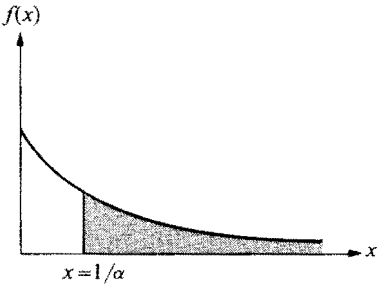


FIGURA 9.5

EJEMPLO 9.7. Supóngase que T, el tiempo para que falle un componente está distribuido exponencialmente. Luego $f(t) = \alpha e^{-\alpha t}$. Si se instalan n de tales componentes ¿cuál es la probabilidad de que la mitad o más de ellas funcionen aún al término de t horas? La probabilidad pedida es

$$\sum_{k=n/2}^{n} \binom{n}{k} (1 - e^{-\alpha t})^{n-k} (e^{-\alpha t k}) \quad \text{si } n \text{ es par;}$$

$$\sum_{k=(n+1)/2}^{n} \binom{n}{k} (1 - e^{-\alpha t})^{n-k} (e^{-\alpha t k}) \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

EJEMPLO 9.8. Supóngase que la duración en horas, llamémosla T, de cierto tubo electrónico es una variable aleatoria con una distribución exponencial con parámetro β. Esto es, la fdp está dada por $f(t) = \beta e^{-\beta t}$, $t > 0$. Una máquina que usa este tubo cuesta C_1 dólares/hora para funcionar. Mientras la máquina está funcionando se obtiene una utilidad de C_2 dólares/hora; además debe contratarse un operador para un número *prefijado* de horas, digamos H, el cual obtiene un pago de C_3 dólares/hora. ¿Para qué valor de H es mayor la *utilidad esperada*?

Obtengamos primero una expresión para la utilidad, llamémosla R. Tenemos

$$\begin{aligned} R &= C_2H - C_1H - C_3H \quad \text{si} \quad T > H \\ &= C_2T - C_1T - C_3H \quad \text{si} \quad T \leq H. \end{aligned}$$

Nótese que R es una variable aleatoria, puesto que es una función de T. Luego,

$$\begin{aligned} E(R) &= H(C_2 - C_1 - C_3)P(T > H) - C_3HP(T \leq H) \\ &\quad + (C_2 - C_1)\int_0^H t\beta e^{-\beta t}\, dt \\ &= H(C_2 - C_1 - C_3)e^{-\beta H} - C_3H(1 - e^{-\beta H}) \\ &\quad + (C_2 - C_1)\left[\beta^{-r} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\right] \\ &= (C_2 - C_1)\left[He^{-\beta H} + \beta^{-1} - e^{-\beta H}(\beta^{-1} + H)\right] - C_3H. \end{aligned}$$

Para obtener el valor máximo de $E(R)$ lo diferenciamos respecto a H y hacemos la derivada igual a cero. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dE(R)}{dh} &= (C_2 - C_1)\left[H(-\beta)e^{-\beta H} + e^{-\beta H} - e^{-\beta H} + (\beta^{-1} + H)(\beta)e^{-\beta H}\right] - C_3 \\ &= (C_2 - C_1)e^{-\beta H} - C_3. \end{aligned}$$

Luego, $dE(R)/dH = 0$ implica que

$$H = -\left(\frac{1}{\beta}\right)\ln\left[\frac{C_3}{C_2 - C_1}\right].$$

[A fin de que la solución anterior sea significativa, debemos tener $H > 0$ lo que ocurre si y sólo si $0 < C_3/(C_2 - C_1) < 1$, lo que a su vez equivale a $C_2 - C_1 > 0$ y $C_2 - C_1 - C_3 > 0$. Sin embargo, la última condición sólo requiere que las cifras del costo sean de una magnitud tal que pueda obtenerse una utilidad.]

Supóngase en particular que $\beta = 0.01$, $C_1 = \$3$, $C_2 = \$10$ y $C_3 = \$4$. Luego, $H = -100 \ln[\frac{4}{7}] = 55.9$ horas $\simeq 56$ horas. Entonces, el operador debe ser contratado por 56 horas para obtener la utilidad máxima. (Para una modificación ligera del ejemplo anterior, véase el Prob. 9.18.)

9.7 La distribución gama

Presentemos primero una función que es muy importante no sólo en la teoría de probabilidad, sino en muchas áreas de las matemáticas.

Definición. La *función gama* denotada con Γ, se define como sigue:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx, \quad \text{definida para } p > 0. \tag{9.12}$$

[Puede demostrarse que la integral impropia anterior existe (converge) cada vez que $p > 0$]. Si integramos lo anterior por partes, haciendo $e^{-x}\, dx = dv$ y $x^{p-1} = u$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(p) &= -e^{-x}x^{p-1}\,|_0^\infty - \int_0^\infty \left[-e^{-x}(p-1)x^{p-2}\, dx\right] \\ &= 0 + (p-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{p-2}\, dx \\ &= (p-1)\Gamma(p-1). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Así hemos demostrado que la función gama sigue una importante relación recursiva. Supóngase que p es un *entero positivo*, dejamos $p = n$. Entonces, aplicando la ecuación (9.13) repetidamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) \\ &= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots \\ &= (n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1).\end{aligned}$$

Sin embargo, $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, por tanto, tenemos

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{9.14}$$

(si n es un entero positivo). (Luego podemos considerar que la función gama es una generalización de la función factorial.) También es fácil verificar que

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx = \sqrt{\pi} \tag{9.15}$$

(Véase el Prob. 9.19.)

Con la ayuda de la función gama, ahora podemos presentar la distribución gama de probabilidades.

Definición. Sea X una variable aleatoria continua que toma sólo valores no negativos. Decimos que X tiene una *distribución de probabilidades gama* si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, \quad x > 0$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.} \tag{9.16}$$

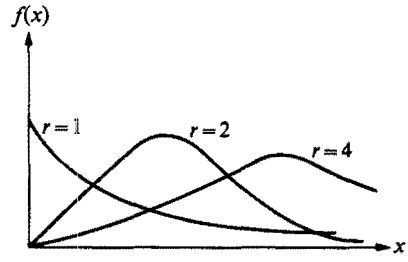


FIGURA 9.6

Esta distribución depende de los *dos parámetros*, r y α de los cuales necesitamos $r > 0$, $\alpha > 0$. [Debido a la definición de la función gama, es fácil ver que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.] La figura 9.6 muestra la gráfica de la fdp de la ecuación (9.16) para diversos valores de r y $\alpha = 1$.

9.8 Propiedades de la distribución gama

a) Si $r = 1$ la ecuación (9.16) se transforma en $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$. Luego, *la distribución exponencial es un caso especial de la distribución gama.* (Si r es un entero positivo > 1, la distribución gama está relacionada también con la distribución exponencial, pero de un modo ligeramente diferente. Nos referiremos a esto en el capítulo 10.)

b) En la mayoría de nuestras aplicaciones, el parámetro r será un *entero* positivo. En este caso, existe una relación interesante entre la

fda de la distribución gama y la distribución de Poisson, misma que desarrollaremos ahora.

Considérese la integral $I = \int_a^\infty (e^{-y}y^r/r!)\, dy$, donde r es un entero positivo y $a > 0$. Luego, $r!I = \int_a^\infty e^{-y}y^r\, dy$. Integrando por partes, haciendo $u = y^r$ y $dv = e^{-y}\, dy$, obtendremos $du = ry^{r-1}dy$ y $v = -e^{-y}$. Por lo tanto $r!I = e^{-a}a^r + r\int_a^\infty e^{-y}y^{r-1}\, dy$. La integral en esta expresión es exactamente la misma forma que la integral original con la sustitución de r por $(r-1)$. Así, al continuar integrando por partes, puesto que r es un entero positivo, obtenemos

$$r!I = e^{-a}\left[a^r + ra^{r-1} + r(r-1)a^{r-2} + \cdots + r!\right].$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} I &= e^{-a}\left[1 + a + a^2/2! + \cdots + a^r/r!\right] \\ &= \sum_{k=0}^{r} P(Y = k), \end{aligned}$$

donde Y tiene una distribución de Poisson con parámetro a.

Consideremos ahora la fda de la variable aleatoria cuya fdp está dada por la ecuación (9.16). Puesto que r es un entero positivo, la ecuación (9.16) puede escribirse como

$$f(x) = \frac{\alpha}{(r-1)!}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, \quad 0 < x$$

y, por consiguiente, la fda de X se transforma en

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - \int_x^\infty \frac{\alpha}{(r-1)!}(\alpha s)^{r-1}e^{-\alpha s}\, ds, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Haciendo $(\alpha s) = u$, encontramos que esto se convierte en

$$F(x) = 1 - \int_{\alpha x}^\infty \frac{u^{r-1}e^{-u}}{(r-1)!}\, du, \quad x > 0.$$

Esta integral es precisamente de la forma antes considerada, a saber, I (con $a = \alpha x$), y así,

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\alpha x}(\alpha x)^k/k!, \quad x > 0. \tag{9.17}$$

Por tanto, *la fda de la distribución gama puede expresarse mediante la fda tabulada de la distribución de Poisson.* (Recuérdese que esto es válido si el parámetro r es un entero positivo.)

Observación: El resultado indicado en la ecuación (9.17), que relaciona la fda de la distribución de Poisson con la fda de la distribución gama, no es tan sorprendente como podría aparecer al principio, tal como lo indicará la siguiente exposición.

Antes que nada, recordemos la relación entre las distribuciones de Pascal y binomial (véase la observación *b*) de la Sec. 8.6). Una relación similar existe entre las distribuciones de Poisson y gama, excepto que la última es una distribución continua. Cuando tratamos con una distribución de Poisson estamos interesados especialmente en el número de ocurrencias de algún evento durante un periodo fijo de tiempo. Y, como se indicará, la distribución gama aparece cuando pedimos la distribución del *tiempo* necesario para obtener un número especificado de ocurrencias del evento.

Específicamente, supóngase que X = número de ocurrencias del evento A durante $(0,t)$. Entonces, en condiciones semejantes (es decir, satisfaciendo las hipótesis A_1 hasta A_5 de la Sec. 8.3), X tiene una distribución de Poisson con parámetro αt, donde α es el número esperado de ocurrencias de A durante un intervalo de tiempo unitario. Sea T = tiempo necesario para observar r ocurrencias de A. Tenemos

$$\begin{aligned} H(t) &= P(T \leq t) = 1 - P(T > t) \\ &= 1 - P(\text{menos que } r \text{ ocurrencias de } A \text{ acontecen en } [0,t]) \\ &= 1 - P(X < r) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{e^{\alpha t}(\alpha t)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Comparando esto con la ecuación (9.17) se establece la relación deseada.

c) Si X tiene una distribución gama dada por la ecuación (9.16), tenemos

$$E(X) = r/\alpha, \qquad V(X) = r/\alpha^2. \tag{9.18}$$

Demostración: Véase el problema 9.20.

9.9 La distribución χ-cuadrada

Un caso especial muy importante de la distribución gama, ecuación (9.16), se obtiene si hacemos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $r = n/2$, donde n es un entero positivo. Obtenemos una familia de distribuciones de un parámetro con fdp

$$f(z) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}, \quad z > 0. \tag{9.19}$$

Una variable aleatoria Z que tiene fdp dada por la ecuación (9.19) se dice que tiene una *distribución χ-cuadrada con n grados de libertad* (se denota con χ^2_n). En la figura 9.7 se muestra la fdp para $n = 1, 2$ y $n > 2$. Una consecuencia inmediata de la ecuación (9.18) es que si Z tiene fdp de la ecuación (9.19), tenemos

$$E(Z) = n, \quad V(Z) = 2n. \tag{9.20}$$

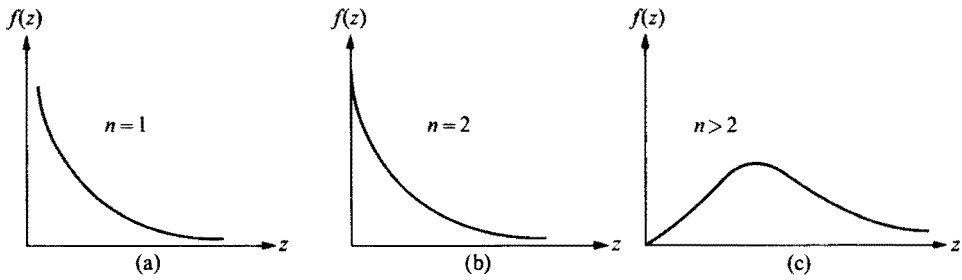


FIGURA 9.7

La distribución χ-cuadrada tiene muchas aplicaciones importantes en inferencia estadística, algunas de las cuales citaremos posteriormente. Debido a su relevancia, la distribución x-cuadrada está tabulada para diversos valores del parámetro n. (Véase el Apéndice.) Por tanto en la tabla podemos encontrar qué valor, denotado con χ^2_α, satisface $P(Z \leq \chi^2_\alpha) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$ (Fig. 9.8). El ejemplo 9.9 trata un caso especial de una caracterización general de la distribución χ-cuadrada que estudiaremos en un capítulo posterior.

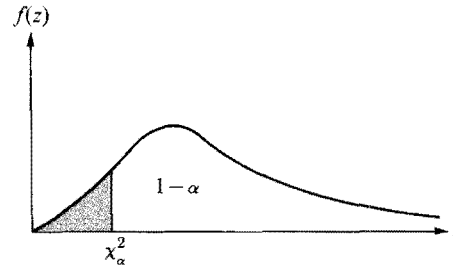


FIGURA 9.8

EJEMPLO 9.9. Supóngase que la velocidad V de un objeto tiene distribución $N(0,1)$. Sea $K = mV^2/2$ la energía cinética del objeto. Para encontrar la fdp de K, busquemos primero la fdp de $S = V^2$. Al aplicar directamente el teorema 5.2 tenemos

$$g(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left[\varphi(\sqrt{s}) + \varphi(-\sqrt{s})\right]$$

$$= s^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s/2}.$$

Si comparamos esto con la ecuación (9.19) y recordamos que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, observamos que S tiene una distribución χ^2_1. Así encontramos que *el cuadrado de una variable aleatoria con distribución* $N(0,1)$ *tiene una distribución* χ^2_1. (Éste es el resultado que generalizaremos posteriormente.)

Ahora podemos obtener la fdp h de la energía cinética K. Puesto que K es una función monótona de V^2, cuya fdp está dada por la g anterior, tenemos directamente

$$h(k) = \frac{2}{m}g\left(\frac{2}{m}k\right) = \frac{2}{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{m}k\right)^{-1/2}e^{-k/m}, \quad k > 0.$$

A fin de evaluar $P(K \leq 5)$, por ejemplo, no necesitamos usar la fdp de K sino que podemos usar simplemente la distribución tabulada χ-cuadrada como sigue

$$P(K \leq 5) = P\left((m/2)V^2 \leq 5\right) = P(V^2 \leq 10/m).$$

Esta última probabilidad se puede obtener de manera directa de las tablas de la distribución χ-cuadrada (si m es conocida), puesto que V^2 tiene una distribución χ_1^2. Puesto que $E(V^2) = 1$ y la varianza $(V^2) = 2$ [véase la Ec. (9.20)], encontramos directamente

$$E(K) = m/2 \quad \text{y} \quad V(K) = m^2/2.$$

Observación: La tabulación de la distribución χ-cuadrada que se incluye en el Apéndice sólo da los valores para los cuales n, el número de grados de libertad, es menos que o igual a 45. La razón de esto es que si n es grande, podemos aproximar la distribución χ-cuadrada con la distribución normal, como se indica en el teorema siguiente.

Teorema 9.2. Supóngase que la variable aleatoria Y tiene una distribución χ_n^2. Entonces, para n suficientemente grande la variable aleatoria $\sqrt{2Y}$ tiene aproximadamente la distribución $N(\sqrt{2n-1}, 1)$. (La demostración no se hará aquí.)

Este teorema puede utilizarse como sigue. Supongamos que necesitamos $P(Y \leq t)$, donde Y tiene la distribución χ_n^2 y n es tan grande que la probabilidad anterior no puede obtenerse en forma directa de la tabla de la distribución χ-cuadrada. Usando el teorema 9.2 podemos escribir

$$\begin{aligned} P(Y \leq t) &= P\left(\sqrt{2Y} \leq \sqrt{2t}\right) \\ &= P\left(\sqrt{2Y} - \sqrt{2n-1} \leq \sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\sqrt{2t} - \sqrt{2n-1}\right). \end{aligned}$$

El valor de Φ se puede obtener de las tablas de la distribución normal.

9.10 Comparación entre varias distribuciones

Hasta ahora hemos presentado diversas distribuciones de probabilidades importantes, tanto discretas como continuas: binomial, de Pascal y de Poisson, entre las discretas, y la exponencial normal y gama, entre las continuas. No volveremos a dar las diversas hipótesis que conducen a esas distribuciones. Aquí, nuestro interés principal es señalar ciertas analogías (y diferencias) entre las variables aleatorias que poseen esas distribuciones.

1. Supóngase que se efectúan ensayos de Bernoulli independientes.
   a) Variable aleatoria: número de ocurrencias del evento A en un número *fijo* de experimentos.
   Distribución: binomial.
   b) Variable aleatoria: número necesario de ensayos de Bernoulli para obtener la primera ocurrencia de A.
   Distribución: geométrica.
   c) Variable aleatoria: número necesario de ensayos de Bernoulli para obtener la r-ésima ocurrencia de A.
   Distribución: de Pascal

2. Supóngase un proceso de Poisson (véase la nota c) del ejemplo 8.5.)
   d) Variable aleatoria: número de ocurrencias de un evento A durante un intervalo de tiempo *fijo*.
   Distribución: de Poisson
   e) Variable aleatoria: tiempo transcurrido hasta la primera ocurrencia de A.
   Distribución: exponencial
   f) Variable aleatoria: tiempo transcurrido hasta la r-ésima ocurrencia de A.
   Distribución: gama.

Observación: Nótese la similitud entre *a*) y *d*), *b*) y *e*) y finalmente entre *c*) y *f*).

9.11 La distribución normal bivariada

Todas las variables aleatorias que hemos presentado han sido variables aleatorias unidimensionales. Como lo mencionamos en el capítulo 6, las variables aleatorias de mayor dimensión desempeñan un papel importante en la descripción de resultados experimentales. Una de las más relevantes variables aleatorias bidimensionales continuas, una generalización directa de la distribución normal unidimensional, se define como sigue:

Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua que toma todos los valores en el plano euclidiano. Decimos que (X, Y) tiene una *distribución normal bivariada* si su fdp conjunta está dada por la expresión siguiente:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\},$$
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty. \tag{9.21}$$

La fdp anterior depende de 5 parámetros. Para que f defina una fdp legítima [o sea, $f(x,y) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$], debemos hacer las siguientes restricciones a los parámetros: $-\infty < \mu_x < \infty$; $-\infty < \mu_y < \infty$; $\sigma_x > 0$; $\sigma_y > 0$; $-1 < \rho < 1$. Las siguientes propiedades de la distribución normal bivariada pueden verificarse fácilmente.

Teorema 9.3. Suponiendo que (X,Y) tiene la fdp dada en la ecuación (9.21), entonces,

a) las distribuciones marginales de X y de Y son $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente;

b) el parámetro ρ que aparece antes es el coeficiente de correlación entre X y Y;

c) las distribuciones condicionales de X (dado que $Y = y$) y de Y (dado que $X = x$) son, respectivamente,

$$N\left[\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y), \sigma_x^2(1-p^2)\right], \quad N\left[\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x), \sigma_y^2(1-p^2)\right]$$

Demostración: Véase el problema 9.21.

Observaciones: a) El recíproco de *a*) del teorema 9.3 no es verdadero. Es posible tener una fdp conjunta que no es normal bivariada aunque las fdp de X y de Y son normales unidimensionales.

b) En la ecuación (9.21) observemos que si $\rho = 0$, la fdp conjunta de (X,Y) puede factorizarse y, por tanto, X y Y son independientes. Así, en el caso de la distribución normal bivariada encontramos que la correlación cero y la independencia *son* equivalentes.

c) La parte *c*) del teorema anterior demuestra que ambas funciones de regresión del promedio son *lineales*. También demuestra que la varianza de la distribución condicional se reduce en la misma proporción que $(1-\rho^2)$. Esto es, si ρ está cercana a cero, la varianza condicional es esencialmente la misma

que la varianza incondicional, mientras que si ρ está cercana a ± 1, la varianza condicional está cercana a cero.

La fdp normal bivariada tiene varias propiedades interesantes. Estableceremos algunas en un teorema, dejando la demostración al lector.

Teorema 9.4. Considérese la superficie $z = f(x, y)$, donde f es la fdp normal bivariada dada en la ecuación (9.21).

a) $z = c$ (constante) corta la superficie en una *elipse*. (Éstas se llaman, algunas veces, contornos de una densidad de probabilidades constante).

b) Si $\rho = 0$ y $\sigma_x = \sigma_y$, la elipse anterior se transforma en una circunferencia. (¿Qué sucede a la elipse anterior cuando $\rho \to \pm 1$?)

Demostración: Véase el problema 9.22.

Observación: Debido a la importancia de la distribución normal bivariada, se han tabulado diversas probabilidades asociadas con ella. (Véase D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.)

9.12 Distribuciones truncadas

EJEMPLO 9.10. Supóngase que se fabrica cierto tipo de pernos y su longitud, llamémosla Y, es una variable aleatoria con distribución N(2.2, 0.01). De un gran lote de tales pernos se saca un nuevo lote, descartando todos aquellos para los cuales $Y > 2$. Por tanto, si X es la variable aleatoria que representa el largo de los pernos en el nuevo lote, y si F es su fdp tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(Y \leq x \mid Y \leq 2) = 1 \quad \text{si} \quad x > 2 \\ &= P(Y \leq x)/P(Y \leq 2) \qquad \text{si} \quad x \leq 2. \end{aligned}$$

(Véase la Fig. 9.9). Entonces, la fdp de X, está dada por

$$f(x) = F'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > 2,$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.1)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-2.2.}{0.1}\right]^2\right)}{\Phi(-2)} \quad \text{si} \quad x \leq 2$$

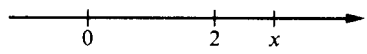


FIGURA 9.9

puesto que

$$P(Y \leq 2) = P\left(\frac{Y - 2.2}{0.1} \leq \frac{2 - 2.2}{0.1}\right) = \Phi(-2).$$

[Φ, como es usual, es la fda de la distribución $N(0, 1)$].

La anterior es una ilustración de una *distribución normal truncada* (específicamente truncada a la derecha de $X = 2$). Este ejemplo se puede generalizar como sigue.

Definición. Decimos que la variable aleatoria X tiene una distribución normal *truncada a la derecha* de $X = \tau$ si su fdp f es de la forma

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > \tau,$$
$$= K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) \quad \text{si} \quad x \leq \tau. \tag{9.22}$$

Nótese que K se determina de la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ y, por tanto,

$$K = \frac{1}{\Phi\left[(\tau - \mu)/\sigma\right]} = \frac{1}{P(Z \leq \tau)}$$

donde Z tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Análoga a la anterior tenemos la siguiente definición.

Definición. Decimos que la variable aleatoria X tiene una distribución normal *truncada a la izquierda* de $X = \gamma$, si su fdp f es de la forma

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x < \gamma, \\ &= \frac{K}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) \quad \text{si} \quad x \geq \gamma. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Nuevamente, K se determina de la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ y así

$$K = \left[1 - \Phi\left(\frac{\gamma - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1}.$$

Los conceptos antes presentados para la distribución normal pueden extenderse de manera evidente a otras distribuciones. Por ejemplo, una variable aleatoria X distribuida exponencialmente, truncada a la izquierda de $X = \gamma$, tendría la siguiente fdp:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \quad \text{si} \quad x < \gamma, \\ &= C\alpha e^{-\alpha x} \quad \text{si} \quad x \geq \gamma. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Nuevamente, C está determinada por la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ y, por tanto,

$$C = e^{\alpha\gamma}$$

También podemos considerar una variable aleatoria truncada en el caso discreto. Por ejemplo, si una variable aleatoria X que tiene una distribución de Poisson (con parámetro λ) está truncada a la derecha en $X = k + 1$, significa que X tiene la distribución siguiente:

$$\begin{aligned} P(X = i) &= 0 \quad \text{si } i \geq k + 1, \\ &= C\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \quad \text{si } i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{9.25}$$

De la condición $\Sigma_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$ determinamos C y encontramos

$$C = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k}(\lambda^j/j!)e^{-\lambda}}.$$

Así,

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!}\frac{1}{\sum_{j=0}^{k}(\lambda^j/j!)},$$

$i = 0, 1, \ldots, k$ y 0 para cualquier otro valor.

Las distribuciones truncadas pueden aparecer en muchas aplicaciones importantes. A continuación consideraremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 9.11. Supóngase que X representa la duración de un componente. Si X está distribuida normalmente con

$$E(X) = 4 \quad \text{y} \quad V(X) = 4$$

encontramos que

$$P(X < 0) = \Phi(-2) = 0.023.$$

Así, este modelo no es muy preciso, puesto que asigna una probabilidad 0.023 a un evento que sabemos que *no puede* ocurrir. En su lugar, podríamos considerar la variable aleatoria X anterior truncada a la izquierda en $X = 0$. Por tanto, supondremos que la fdp de la variable aleatoria X está dada por

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \leq 0,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}(2)} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{2}\right)^2\right]\frac{1}{\Phi(2)} \quad \text{si} \quad x > 0.$$

Observación: Hemos indicado que a menudo usamos la distribución normal para representar una variable aleatoria X de la cual *sabemos* que no puede tomar valores negativos. (Por ejemplo, el tiempo para que ocurra una falla, el largo de una varilla, etc.) Para ciertos valores de los parámetros $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = V(X)$ el valor de $P(X < 0)$ será despreciable. Sin embargo, si éste no es el caso (como en el Ej. 9.11), deberíamos considerar el uso de la distribución normal truncada a la izquierda en $X = 0$.

EJEMPLO 9.12. Supóngase que un sistema está formado por n componentes que funcionan de manera independiente y cada uno tiene la misma probabilidad p de funcionar correctamente. Cada vez que el sistema funciona mal, se inspecciona a fin de establecer cuántos y cuáles son los componentes que fallan. Definamos la variable aleatoria X como el número de componentes que fallan en un sistema descompuesto. Si suponemos que el sistema falla si y sólo si al menos un componente falla, entonces X tiene una *distribución binomial truncada a la izquierda* en $X = 0$. Precisamente el hecho de que *haya fallado* el sistema impide la posibilidad de que $X = 0$. Específicamente tenemos

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}}{P(\text{sistema falla})}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Puesto que $P(\text{el sistema falla}) = 1 - p^n$, podemos escribir

$$P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}}{1-p^n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

EJEMPLO 9.13. Supóngase que una fuente radiactiva emite partículas de acuerdo con una distribución de Poisson con parámetro λ. Un dispositivo para contar esas emisiones sólo funciona si llegan menos de tres partículas. (Esto es, si llegan más de tres partículas durante un periodo de tiempo especificado, el dispositivo deja de funcionar debido a que se produce un "cierre".) Por tanto, si Y es el número de partículas anotadas durante el intervalo de tiempo específico, Y tiene los valores posibles 0, 1 y 2. Así,

$$P(Y = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \frac{\lambda^k}{e^{-\lambda}\left[1 + \lambda + (\lambda^2/2)\right]}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Puesto que la distribución normal truncada es particularmente importante, consideremos el problema siguiente asociado con esta distribución.

Supóngase que X es una variable aleatoria distribuida normalmente truncada hacia la derecha en $X = \tau$. Luego, la fdp f es de la forma

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq \tau.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \frac{1}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \quad \text{si} \quad x \leq \tau.$$

Por tanto, tenemos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\tau-\mu)/\sigma} (s\sigma+\mu)e^{-s^2/2}\,ds$$

$$= \frac{1}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \left[\mu\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\tau-\mu)/\sigma} se^{-s^2/2}\,ds\right]$$

$$= \mu + \frac{\sigma}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2}(-1)\,|_{-\infty}^{(\tau-\mu)/\sigma}$$

$$= \mu - \frac{\sigma}{\Phi\left[(\tau-\mu)/\sigma\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Nótese que la expresión obtenida para $E(X)$ se expresa mediante las funciones tabuladas. La función Φ es, por supuesto, la fda corriente de la distribución $N(0,1)$, mientras que $(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ es la ordenada de la fdp de la distribución $N(0,1)$ y también está tabulada. En realidad, el cociente

$$\frac{(1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}}{\Phi(x)}$$

está tabulado. (Véase D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Addison–Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1962.)

Utilizando el resultado anterior, ahora podemos formular la siguiente pregunta: para μ y σ dados, ¿dónde debería ocurrir la truncación (esto es, ¿cuál debería ser el valor de τ?) de modo que el valor esperado *después* de la truncación tenga algún valor A preasignado? Podemos responder esta pregunta con ayuda de la distribución normal tabulada. Supóngase que $\mu = 10$, $\sigma = 1$, y necesitamos que $A = 9.5$. Por tanto, debemos resolver

$$9.5 = 10 - \frac{1}{\Phi(\tau-10)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\tau-10)^2/2}.$$

Esto se transforma en

$$\frac{1}{2} = \frac{(1/\sqrt{2\pi})e^{-(\tau-10)^2/2}}{\Phi(\tau - 10)}.$$

Utilizando las tablas ya citadas, encontramos que $\tau - 10 = 0.52$, y por tanto, $\tau = 10.52$.

Observación: El problema presentado anteriormente sólo puede resolverse para ciertos valores de μ, σ y A. Esto es, para μ y σ dadas, puede no ser posible un valor específico de A. Consideremos la ecuación que puede resolverse:

$$\mu - A = \frac{\sigma}{\Phi\left[(\tau - \mu)/\sigma\right]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\tau - \mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

El segundo miembro de esta ecuación es obviamente positivo. Por lo tanto, debemos tener $(\mu - A) > 0$ con objeto de que el problema anterior tenga solución. Esta condición no es muy inesperada puesto que sólo expresa que el valor esperado (después de una truncación a la *derecha*) debe ser menor que el valor original esperado.

PROBLEMAS

9.1. Supóngase que X tiene una distribución $N(2, 0, 16)$. Usar la tabla de la distribución normal para evaluar las probabilidades siguientes.

a) $P(X \geq 2.3)$ *b*) $P(1.8 \leq X \leq 2.1)$

9.2. El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con promedio 0.8 y varianza 0.0004, ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro sobrepase 0.81 pulgadas?

9.3. Supóngase que el cable del problema 9.2 se considere defectuoso si el diámetro se diferencia de su promedio en más de 0.025. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable defectuoso?

9.4. Se sabe que los errores en cierto instrumento para medir longitudes están distribuidos normalmente con valor esperado cero y desviación estándar de 1 pulgada. ¿Cuál es la probabilidad de que al medir los errores, éstos sean mayores de 1 pulgada, 2 pulgadas y 3 pulgadas?

9.5. Supóngase que la duración de los instrumentos electrónicos D_1 y D_2 tienen distribuciones $N(40, 36)$ y $N(45, 9)$, respectivamente. ¿Cuál se debe preferir para usarlo durante un periodo de 45 horas? ¿Cuál se debe preferir para usarlo durante un periodo de 48 horas?

9.6. Considérese sólo en la magnitud de X, digamos $Y = |X|$. Si X tiene una distribución $N(0, 1)$, determinar la fdp de Y y calcular $E(Y)$ y $V(Y)$.

9.7. Supóngase que se determina la posición de un objeto en un plano. Sean X y Y los errores en las medidas de las coordenadas x y y respectivamente. Supóngase que X y Y son independientes y están distribuidas idénticamente $N(0, \sigma^2)$. Encontrar la fdp de $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. (La distribución de R se conoce como *distribución de Rayleigh*.) [*Indicación*: sean $X = R\cos\psi$ y $Y = R\,\text{sen}\,\psi$, obtener la fdp conjunta de (R, ψ) y luego la densidad marginal de R.]

9.8. Encuéntrese la fdp de la variable aleatoria $Q = X/Y$, donde X y Y están distribuidas como en el problema 9.7. (La distribución de Q se conoce como distribución de *Cauchy*.) ¿Se puede calcular $E(Q)$?

9.9. Una distribución muy relacionada con la distribución normal es la *distribución log normal*. Suponer que X está distribuida normalmente con promedio μ y varianza σ^2. Sea $Y = e^x$. Entonces Y tiene la distribución log normal. (O sea, Y es log normal si y sólo si $\ln Y$ es normal.) Encontrar la fdp de Y. *Observacion:* Las variables aleatorias siguientes se pueden representar por la distribución anterior: el diámetro de partículas pequeñas después de un proceso de trituración, el tamaño de un organismo bajo la acción de pequeños impulsos y la duración de ciertos artículos.

9.10. Supóngase que X tiene una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Determinar c (como una función de μ y σ), tal que $P(X \leq c) = 2P(X > c)$.

9.11. Supóngase que la temperatura (en grados centígrados) está distribuida normalmente con esperanza 50° y varianza 4. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura T esté entre 48° y 53° centígrados?

9.12. Se especifica que el diámetro exterior de un árbol de transmisión (flecha), llamémoslo D, debe ser de 4 pulgadas. Supóngase que D es una variable aleatoria distribuida normalmente con media de 4 pulgadas y varianza 0.01 pulgada^2. Si el diámetro real se diferencia del valor especificado por más de 0.05 pulgada, pero en menos de 0.08 pulgada, la pérdida del fabricante es de \$0.50. Si el diámetro real se diferencia del diámetro especificado en más de 0.08 pulgada, la pérdida es de \$1.00. La pérdida, L, puede considerarse como una variable aleatoria. Encontrar la distribución de probabilidades de L y calcular $E(L)$.

9.13. Compare la *cota superior* de la probabilidad $P[|X - E(X)| \geq 2\sqrt{V(X)}]$ obtenida con la desigualdad de Chebyshev con la probabilidad exacta en cada uno de los casos siguientes:

a) X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$.
b) X tiene distribución de Poisson con parámetro λ.
c) X tiene distribución exponencial con parámetro α.

9.14. Supóngase que X es una variable aleatoria para la cual $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Suponiendo que Y está distribuida uniformemente en el intervalo (a, b), determinar a y b de modo que $E(X) = E(Y)$ y $V(X) = V(Y)$.

9.15. Supóngase que X, la resistencia a la ruptura de una cuerda (en libras), tiene distribución $N(100, 16)$. Cada 100 pies de alambre para cuerda produce una utilidad de \$25, si $X > 95$. Si $X \leq 95$, la cuerda puede utilizarse con un propósito diferente y se obtiene una utilidad de \$10 por alambre. Encontrar la utilidad esperada por alambre.

9.16. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes cada una con una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sea $Z(t) = X_1 \cos \omega t + X_2 \operatorname{sen} \omega t$. Esta variable aleatoria es de interés en el estudio de señales aleatorias. Sea $V(t) = dZ(t)/dt$. (Se supone que ω es constante.)

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidades de $Z(t)$ y $V(t)$ para cualquier t fija?

b) Demostrar que $Z(t)$ y $V(t)$ no están correlacionadas. [*Observación:* Puede demostrarse que $Z(t)$ y $V(t)$ y son independientes, pero esto es más difícil de hacer].

9.17. Un combustible para cohetes va a contener cierto porcentaje (llamémoslo X) de un compuesto particular. Las especificaciones exigen que X esté entre 30 y 35% . El fabricante tendrá una utilidad neta en el combustible (por galón) que es la siguiente función de X:

$$\begin{aligned} T(X) &= \$0.10 \text{ por galón} \quad \text{si} \quad 30 < X < 35, \\ &= \$0.05 \text{ por galón} \quad \text{si} \quad 35 \leq X \leq 40 \text{ o } 25 < X \leq 30, \\ &= -\$0.10 \text{ por galón} \end{aligned}$$

a) Si X tiene distribución $N(33, 9)$, calcular $E(T)$.

b) Supóngase que el fabricante desea aumentar su utilidad esperada, $E(T)$, en 50%, aumentando su utilidad (por galón) en aquellas partidas de combustible que satisfacen las especificaciones, $30 < X < 35$. ¿Cuál debe ser su utilidad neta?

9.18. Considérese el ejemplo 9.8. Suponiendo que a un operario se le pagan C_3 dólares/hora mientras la máquina está funcionando y C_4 dólares/hora ($C_4 < C_3$) por el resto del tiempo durante el cual ha sido contratado después de que la máquina ha fallado, determinar nuevamente para qué valor de H (el número de horas que se contrata al operario), la utilidad esperada es máxima.

9.19. Demostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. (Véase 9.15.) [*Sugerencia:* Hacer el cambio de variables $x = u^2/2$ en la integral $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x}\, dx$.]

9.20. Verificar las expresiones de $E(X)$ y $V(X)$ cuando X tiene una distribución gama [véase la Ec. (9.18)].

9.21. Demostrar el teorema 9.3.

9.22. Demostrar el teorema 9.4.

9.23. Supóngase que la variable aleatoria X tiene una distribución χ-cuadrada con 10 grados de libertad. Si se pidiera encontrar dos números, a y b, tales que $P(a < x < b) = 0.85$, se podría verificar que existen muchos pares de esa clase.

a) Encontrar dos conjuntos diferentes de valores (a, b) que satisfagan la condición anterior.

b) Suponer que además de lo anterior, necesitamos que

$$P(X < a) = P(X > b).$$

¿Cuántos conjuntos de valores hay?

9.24. Supóngase que V, la velocidad (cm/seg) de un objeto que tiene una masa de 1 kg, es una variable aleatoria que tiene una distribución $N(0, 25)$. Representar con $K = 1000V^2/2 = 500V^2$ la energía cinética (KE) del objeto. Calcular $P(K < 200)$, $P(K > 800)$.

9.25. Suponer que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Obtener una expresión aproximada para $E(Y)$ y $V(Y)$ usando el teorema 7.7. Si $Y = \ln X$.

9.26. Supóngase que X tiene una distribución normal truncada a la derecha como se da en la ecuación (9.22). Encontrar una expresión para $E(X)$ en términos de funciones tabuladas.

9.27. Supóngase que X tiene una distribución exponencial truncada a la izquierda como está dada en la ecuación (9.24). Obtener $E(X)$.

9.28. *a*) Encontrar la distribución de probabilidades de una variable aleatoria distribuida binomialmente (con base en n repeticiones de un experimento) truncada a la derecha en $X = n$; esto es, $X = n$ no puede ser observada.

b) Encontrar el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria descrita en *a*).

9.29. Supóngase que una variable aleatoria distribuida normalmente con valor esperado μ y varianza σ^2 está truncada a la izquierda en $X = \tau$ y a la derecha en $X = \gamma$. Encontrar la fdp de esta variable aleatoria "truncada doblemente".

9.30. Suponer que X, el largo de una varilla, tiene distribución $N(10, 2)$. En vez de medir el valor de X, sólo se especifica si se cumplen ciertas exigencias. Específicamente, cada varilla fabricada se clasifica como sigue: $X < 8$, $8 \leq X <$

12 y $X \geq 12$. Si se fabrican 15 de tales varillas, ¿cuál es la probabilidad de que un número igual de varillas caiga en cada una de las categorías anteriores?

9.31. Se sabe que la lluvia anual que cae en cierta región es una variable aleatoria distribuida normalmente con media igual a 29.5 pulgadas y desviación estándar 2.5 pulgadas. ¿Cuántas pulgadas de lluvia (anuales) caen en exceso alrededor del 5% de las veces?

9.32. Suponiendo que X tiene una distribución $N(0, 25)$ calcular $P(1 < X^2 < 4)$.

9.33. Sea X_t, el número de partículas emitidas en t horas por una fuente radioactiva y suponer que X_t tiene una distribución de Poisson con parámetro βt. Sea T igual al número de horas hasta la primera emisión. Demostrar que T tiene una distribución exponencial con parámetro β. [*Sugerencia:* Encontrar el evento equivalente (en términos de X_t) del evento $T > t$.]

9.34. Supóngase que X_t está definida como en el problema 9.33 con $\beta = 30$. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre emisiones sucesivas sea >5 minutos, >10 minutos y <30 segundos?

9.35. En algunas tablas de la distribución normal, $H(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ está tabulada para valores positivos de x (en vez de $\Phi(x)$ como aparece en el Apéndice). Si la variable aleatoria X tiene distribución $N(1, 4)$, expresar cada una de las probabilidades siguientes en términos de los valores *tabulados* de la función H.

a) $P[|X| > 2]$ *b*) $P[X < 0]$.

9.36. Supóngase que un dispositivo para telemedir satélites recibe dos clases de señales que pueden anotarse como números reales, digamos X y Y, y que X y Y son variables aleatorias continuas independientes con fdp f y g, respectivamente. Supóngase que durante cualquier periodo de tiempo específico sólo se puede recibir una de esas señales y luego retransmitir a la Tierra la señal que primero llega. Además, la señal que origina X llega primero con probabilidad p y, por tanto, la señal que origina Y llega primero con probabilidad $1 - p$. Denótese con Z la variable aleatoria cuyo valor realmente es recibido y transmitido.

a) Expresar la fdp de Z en términos de f y g.
b) Expresar $E(Z)$ en términos de $E(X)$ y $E(Y)$.
c) Expresar $V(Z)$ en términos de $V(X)$ y $V(Y)$.
d) Supóngase que X tiene distribución $N(2, 4)$ y que Y tiene distribución $N(3, 3)$. Si $p = \frac{2}{3}$, calcular $P(Z > 2)$.
e) Suponiendo que X y Y tienen distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente, demostrar que si $\mu_1 = \mu_2$, la distribución de Z es "unimodal", esto es, la fdp de Z tiene un máximo relativo único.

9.37. Supóngase que el número de accidentes en una fábrica se puede representar por un proceso de Poisson con un promedio de 2 accidentes por semana. ¿Cuál es la probabilidad de que *a*) el tiempo entre un accidente y el siguiente sea mayor de 3 días, *b*) el tiempo de un accidente al tercero sea mayor de una semana? [*Indicación:* En *a*), sea T = tiempo (en días) y calcular $P(T > 3)$.]

9.38. Un proceso de fabricación produce en promedio un artículo defectuoso entre 300 fabricados. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el *tercer* artículo defectuoso:

a) antes de que sean producidos 1000 artículos?
b) cuando se produce el 1000–ésimo artículo?
c) después de que se produzca el 1000–ésimo artículo?

[*Sugerencia:* Supóngase un proceso de Poisson.]

10

La función generadora de momentos

10.1 Introducción

En este capítulo presentaremos un concepto matemático importante que tiene diversas aplicaciones en los modelos probabilísticos que estamos estudiando. Con el propósito de presentar un desarrollo riguroso de este tema, se requerirían conocimientos matemáticos de un nivel considerablemente mayor del que estamos suponiendo aquí. Sin embargo, si queremos evitar ciertas dificultades matemáticas que aparecen y si aceptamos que ciertas operaciones son válidas, entonces podemos obtener una comprensión suficiente de las principales ideas implicadas para usarlas inteligentemente.

Con el propósito de motivar lo que sigue, recordemos nuestro primer contacto con el logaritmo. Éste sólo se presentó como una ayuda para calcular. Con cada número real positivo x, asociamos otro número, designado con $\log x$. (El valor de este número se pudo obtener de las tablas correspondientes.) A fin de calcular xy, por ejemplo, obtenemos el valor de $\log x$ y $\log y$ y luego calculamos $\log x + \log y$, que representa $\log xy$. Conociendo $\log xy$ pudimos obtener luego el valor de xy (nuevamente con la ayuda de tablas). De manera semejante con la ayuda

de los logaritmos podemos simplificar la elaboración de otros cálculos aritméticos. El planteamiento anterior es útil por las siguientes razones:

a) A cada número positivo x le corresponde exactamente un número, $\log x$, y este número se obtiene con facilidad de las tablas.

b) A cada valor de $\log x$ le corresponde exactamente un valor de x, y este valor de nuevo se obtiene de tablas. (Esto es, la relación entre x y $\log x$ es uno a uno.)

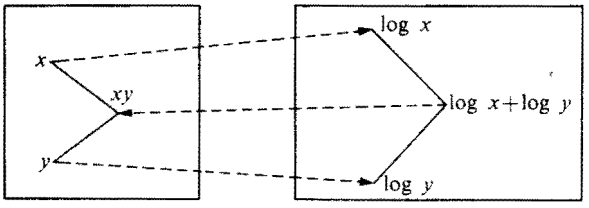


FIGURA 10.1

c) Ciertas operaciones aritméticas que relacionan los números x y y, como la multiplicación y la división, pueden reemplazarse por operaciones más sencillas como la adición y la sustracción, mediante los números "transformados" $\log x$ y $\log y$ (Véase el esquema de la Fig. 10.1).

En vez de efectuar las operaciones directamente con los números x y y, primero obtenemos los números $\log x$ y $\log y$, hacemos nuestros cálculos con esos números y luego los transformamos de nuevo.

10.2 La función generadora de momentos

Ahora consideremos una situación más complicada. Supóngase que X es una variable aleatoria; es decir, X es una función del espacio muestral a los números reales. Al calcular diversas características de la variable aleatoria X, como $E(X)$ o $V(X)$, trabajamos directamente con la distribución de probabilidades de X. [La distribución de probabilidades está dada por una *función*: la fdp en el caso continuo, o las probabilidades puntuales $p(x_i) = P(X = x_i)$ en el caso discreto. La última también se puede considerar como una función que toma valores distintos de cero sólo si $X = x_i, i = 1, 2, \cdots$] Posiblemente podemos presentar otra *función* y hacer los cálculos necesarios mediante ella (tal como antes asociábamos con cada *número* un nuevo *número*). Esto es, de hecho, lo que haremos precisamente. Primero daremos una definición formal.

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con distribución de probabilidades $P(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ La función, M_X, llamada *función generadora de momentos de* X, se define con

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} p(x_j). \tag{10.1}$$

Si X es una variable aleatoria continua con fdp f, definimos la función generadora de momentos con

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx \tag{10.2}$$

Observaciones: a) Tanto en el caso discreto como en el continuo, $M_X(t)$ es simplemente el valor esperado de e^{tX}. Por tanto, podemos combinar las expresiones anteriores y escribir

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \tag{10.3}$$

b) $M_X(t)$ es el valor que toma la función M_X por la variable (real) t. La notación que indica la dependencia de X se usa porque quizá deseemos considerar dos variables aleatorias, X y Y y luego investigar la función generadora de momentos de cada una, esto es, M_X y M_Y.

c) Usaremos la forma abreviada fgm para la función generadora de momentos.

d) La fgm, como se definió anteriormente, se escribe como una serie infinita o integral (impropia), dependiendo de si la variable aleatoria es discreta o continua. Tal serie (o integral) puede no existir siempre (es decir, convergir a un valor infinito) para todos los valores de t. Por tanto, puede suceder que la fgm no esté definida para todos los valores de t. Sin embargo, no nos interesará esta posible dificultad. Cada vez que hagamos uso de la fgm, siempre supondremos que existe. (Para $t = 0$, *la fgm siempre existe y es igual a 1.*)

e) Hay otra función muy relacionada con la fgm que a menudo se usa en su lugar. Se llama *función característica*, se denota con C_X, y se define con $C_X(t) = E(e^{itX})$, donde $i = \sqrt{-1}$, la unidad imaginaria. Por razones teóricas, hay una ventaja considerable al usar $C_X(t)$ en vez de $M_X(t)$. [Por esta razón, $C_X(t)$ siempre existe para *todos* los valores de t]. Sin embargo, a fin de evitar cálculos con números complejos restringiremos nuestra exposición a la función generadora de momentos.

f) Postergaremos hasta la sección 10.4 la exposición de por qué llamar a M_X función generadora de momentos.

10.3 Ejemplos de funciones generadoras de momentos

Antes de considerar algunas aplicaciones importantes de la fgm a la teoría de la probabilidad, evaluemos algunas de estas funciones.

EJEMPLO 10.1. Supóngase que X está *distribuida uniformemente* en el intervalo $[a, b]$. Por tanto, la fgm está dada por

$$M_X(t) = \int_a^b \frac{e^{tx}}{(b-a)}\, dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)t}\left[e^{bt} - e^{at}\right], \quad t \neq 0. \tag{10.4}$$

EJEMPLO 10.2. Supóngase que X está distribuida *binomialmente* con parámetros n y p. Luego,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left[pe^t + (1-p)\right]^n. \tag{10.5}$$

(Esta última igualdad se deduce de una aplicación directa del teorema del binomio.)

EJEMPLO 10.3. Supóngase que X tiene una distribución *de Poisson* con parámetro λ. Así,

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}. \tag{10.6}$$

(La tercera igualdad se deduce del desarrollo de e^y en $\sum_{n=0}^{\infty}(y^n/n!)$. Usamos esto con $y = \lambda e^t$.)

EJEMPLO 10.4. Supóngase que X tiene una *distribución exponencial* con parámetro α. Por tanto,

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\alpha e^{-\alpha x}\, dx = \alpha \int_0^\infty e^{x(t-\alpha)}\, dx\,.$$

(Esta integral converge sólo si $t < \alpha$. Por tanto, la fgm existe sólo para esos valores de t. Suponiendo que se satisface esta condición, continuamos.) Luego,

$$M_X(T) = \frac{\alpha}{t-\alpha} e^{x(t-\alpha)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha - t}, \quad t < \alpha. \tag{10.7}$$

Observación: Puesto que la fgm es sólo un valor esperado de X, se puede obtener la fgm de una función de una variable aleatoria sin obtener primero su distribución de probabilidades (véase el Teorema 7.3). Por ejemplo, si X tiene distribución $N(0,1)$ y deseamos encontrar la fgm de $Y = X^2$ podemos proceder sin obtener primero la fdp de Y. Simplemente escribimos

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{tX^2}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tx^2 - x^2/2)\, dx = (1-2t)^{-1/2}$$

después de una integración inmediata.

EJEMPLO 10.5. Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Entonces,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx\,.$$

Sea $(x-\mu)/\sigma = s$; así $x = \sigma s + \mu$ y $dx = \sigma\, ds$. Por tanto,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[t(\sigma s + \mu)\right] e^{-s^2/2}\, ds$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}\left[s^2 - 2\sigma t s\right]\right) ds$$

$$= e^{t\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[(s-\sigma t)^2 - \sigma^2 t^2\right]\right\} ds$$

$$= e^{t\mu + \sigma^2 t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{2}[s-\sigma t]^2\right) ds.$$

Sea $s - \sigma t = v$; entonces $ds = dv$ y obtenemos

$$M_X(t) = e^{t\mu+\sigma^2 t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}\, dv$$

$$= e^{(t\mu+\sigma^2 t^2/2)}. \tag{10.8}$$

EJEMPLO 10.6. Sea X una *distribución gama* con parámetros α y r (véase la Ec. (9.16)). Entonces,

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} e^{tx}(\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x(\alpha-t)}\, dx\,.$$

(Esta integral converge a condición de que $\alpha > t$). Sea $x(\alpha - t) = u$; así,

$$dx = (du)/(\alpha - t)$$

y obtenemos

$$M_X(t) = \frac{\alpha^r}{(\alpha - t)\Gamma(r)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\alpha - t}\right)^{r-1} e^{-u}\, du$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\infty} u^{r-1} e^{-u}\, du.$$

Puesto que la integral es igual a $\Gamma(r)$, tenemos

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^r. \tag{10.9}$$

Observaciones: *a*) Si $r = 1$, la función gama se convierte en distribución exponencial. Observemos que si $r = 1$, las ecuaciones (10.7) y (10.9) son iguales.

b) Puesto que la distribución χ-cuadrada se obtiene como un caso especial de la distribución gama al hacer $\alpha = \frac{1}{2}$ y $r = n/2$ (n es un entero positivo), tenemos que si Z tiene distribución χ^2_n, entonces,

$$M_Z(t) = (1 - 2t)^{-n/2} \tag{10.10}$$

10.4 Propiedades de la función generadora de momentos

Daremos ahora la razón para llamar M_X función *generadora de momentos*. Recordemos el desarrollo en serie de Maclaurin de la función e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

(Se sabe que esta serie converge para todos los valores de x.) Así,

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tx)^n}{n!} + \cdots$$

Ahora,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(1 + tX + \frac{(tX)^2}{2!} + \cdots + \frac{(tX)^n}{n!} + \cdots\right).$$

Hemos demostrado que para una suma *finita*, el valor esperado de la suma es igual a la suma de los valores esperados. Sin embargo, considerando una suma infinita como la anterior no podemos aplicar, de inmediato tal resultado. No obstante, resulta que en condiciones justamente generales esta operación es todavía válida. Supondremos que las condiciones pedidas se satisfacen y por consiguiente procedemos.

Recordemos que t es una constante respecto a la esperanza y podemos escribir

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2E(X^2)}{2!} + \cdots + \frac{t^nE(X^n)}{n!} + \cdots$$

Puesto que M_X es una función de la variable real t, podemos considerar que tomamos la derivada de $M_X(t)$ respecto a t, esto es $[d/(dt)]M_X(t)$ o, en forma breve, $M'(t)$. Nos encontramos nuevamente con una dificultad matemática. La derivada de una suma *finita* siempre es igual a la suma de las derivadas (suponiendo, por supuesto, que todas las derivadas existen). Sin embargo, para una suma infinita esto no siempre es así. Deben satisfacerse ciertas condiciones a fin de justificar esta operación; sólo supondremos que esas condiciones existen y continuamos. (En la mayor parte de los problemas que encontraremos tal suposición se justifica.) Así,

$$M'(t) = E(X) + tE(X^2) + \frac{t^2E(X^3)}{2!} + \cdots + \frac{t^{n-1}E(X^n)}{(n-1)!} + \cdots$$

Haciendo $t = 0$ encontramos que sólo subsiste el primer término y tenemos

$$M'(0) = E(X).$$

Así, la primera derivada de la fgm calculada en $t = 0$ da el valor esperado de la variable aleatoria. Si calculamos la segunda derivada de $M_X(t)$, nuevamente procederemos como antes, y obtenemos

$$M''(t) = E(X^2) + tE(X^3) + \cdots + \frac{t^{n-2}E(X^n)}{(n-2)!} + \cdots,$$

y haciendo $t = 0$, tenemos

$$M''(0) = E(X^2).$$

Continuando de esta manera obtenemos el siguiente teorema [suponiendo que $M^{(n)}(0)$ existe].

Teorema 10.1.

$$M^{(n)}(0) = E(X^n) \tag{10.11}$$

(Esto es, la n-ésima derivada de $M_X(t)$ calculada en $t = 0$ da $E(X^n)$.

Observaciones: a) Los números $E(X^n)$, $n = 1, 2, \ldots$, se llaman n-ésimos momentos de la variable aleatoria X respecto a cero. Por tanto, hemos demostrado que conociendo la función M_X, pueden "generarse" los momentos (de aquí el nombre de "función generadora de momentos").

b) Recordemos el desarrollo general en serie de Maclaurin de una función, digamos h.

$$h(t) = h(0) + h'(0)t + \frac{h''(0)t^2}{2!} + \cdots + \frac{h^{(n)}(0)t^n}{n!} + \cdots,$$

donde $h^{(n)}(0)$ es la n-ésima derivada de la función h calculada en $t = 0$. Aplicando este resultado a la función M_X, podemos escribir

$$M_X(t) = M_X(0) + M'_X(0)t + \cdots + \frac{M_X^{(n)}(0)t^n}{n!} + \cdots$$
$$= 1 + \mu_1 t + \mu_2 t^2/2! + \cdots + \frac{\mu_n t^n}{n!} + \cdots$$

donde, $\mu_i = E(X^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ En particular,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = M''(0) - [M'(0)]^2.$$

c) El lector puede preguntarse si los métodos anteriores son del todo útiles. ¿No sería más simple (y más elemental) calcular directamente los momentos de X, en vez de obtener primero la fgm y luego diferenciarla? La respuesta es que para muchos problemas este planteamiento es más sencillo. Los siguientes ejemplos lo ilustrarán.

EJEMPLO 10.7. Supóngase que X tiene una distribución binomial con parámetros n y p. Por tanto (Ej. 10.2), $M_X(t) = \left[pe^t + q\right]^n$. Así,

$$M'(t) = n(pe^t + q)^{n-1}pe^t,$$
$$M''(t) = np\left[e^t(n-1)(pe^t + q)^{n-2}pe^t + (pe^t + q)^{n-1}e^t\right].$$

Por tanto, $E(X) = M'(0) = np$, que concuerda con nuestro resultado anterior. También, $E(X^2) = M''(0) = np[(n-1)p + 1]$. Luego,

$$V(X) = M''(0) - \left[M'(0)\right]^2 = np(1-p),$$

lo que nuevamente concuerda con lo antes encontrado.

EJEMPLO 10.8. Supóngase que X tiene distribución $N(\alpha, \beta^2)$. Por tanto (Ej. 10.5), $M_X(t) = \exp(\alpha t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2)$. Así,

$$M'(t) = e^{\alpha t} + \beta^{2t^2/2}(\beta^2 t + \alpha),$$
$$M''(t) = e^{\beta^2 t^2/2 + \alpha t}\beta^2 + (\beta^2 t + \alpha)^2 e^{\beta^2 t^2/2 + \alpha t},$$

y $M'(0) = \alpha$, $M''(0) = \beta^2 + \alpha^2$, dado $E(X) = \alpha$ y $V(X) = \beta^2$ como antes.

Usemos el método de las fgm para calcular la esperanza y la varianza de una variable aleatoria con distribución de probabilidades geométrica, ecuación (8.5).

EJEMPLO 10.9. Sea X una distribución de probabilidades geométrica. Esto es, $P(X = k) = q^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots (p + q = 1)$. Así,

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} q^{k-1} p = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} (qe^t)^k.$$

Si nos restringimos a aquellos valores de t para los cuales $0 < qe^t < 1$ [esto es, $t < \ln(1/q)$], entonces podemos sumar la serie anterior como una serie geométrica y obtener

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{p}{q} qe^t \left[1 + qe^t + (qe^t)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{p}{q} \frac{qe^t}{1 - qe^t} = \frac{pe^t}{1 - qe^t}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{(1 - qe^t)pe^t - pe^t(-qe^t)}{(1 - qe^t)^2} = \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}; \\ M''(t) &= \frac{(1 - qe^t)^2 pe^t - pe^t 2(1 - qe^t)(-qe^t)}{(1 - qe^t)^4} = \frac{pe^t(1 + qe^t)}{(1 - qe^t)^3}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E(X) = M'(0) = p/(1 - q)^2 = 1/p,$$

$$E(X^2) = M''(0) = p(1 + q)/(1 - q)^3 = (1 + q)/p^2,$$

y

$$V(X) = (1 + q)/p^2 - (1/p)^2 = q/p^2.$$

Tenemos así una verificación del teorema 8.5.

Los dos teoremas siguientes serán de particular importancia en nuestras aplicaciones de la fgm.

Teorema 10.2. Supóngase que la variable aleatoria X tiene fgm M_X. Sea $Y = \alpha X + \beta$. Entonces, M_Y, la fgm de la variable aleatoria Y, está dada por

$$M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t). \tag{10.12}$$

En palabras, para encontrar la fgm de $Y = \alpha X + \beta$ calculamos la fgm de X en αt (en vez de t) y multiplicamos por $e^{\beta t}$.

Demostración:

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E\left[e^{(\alpha X+\beta)t}\right]$$

$$= e^{\beta t} E(e^{\alpha t X}) = e^{\beta t} M_X(\alpha t).$$

Teorema 10.3. Sean X y Y dos variables aleatorias con fgm, $M_X(t)$ y $M_Y(t)$, respectivamente. Si $M_X(t) = M_Y(t)$ para todos los valores de t, entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidades.

Demostración: La demostración de este teorema es demasiado difícil para darla aquí. Sin embargo, es muy importante comprender exactamente lo que establece el teorema. Éste dice que si dos variables aleatorias tienen la misma fgm, entonces tienen la misma distribución de probabilidades. Esto es, la fgm determina unívocamente la distribución de probabilidades de la variable aleatoria.

EJEMPLO 10.10. Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Sea $Y = \alpha X + \beta$. Luego, Y está de nuevo distribuida normalmente. Del teorema 10.2, la fgm de Y es $M_Y(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t)$. Sin embargo, del ejemplo 10.5 tenemos que

$$M_X(t) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}.$$

Por tanto,

$$M_Y(t) = e^{\beta t}\left[e^{\alpha\mu t+(\alpha\sigma)^2t^2/2}\right]$$

$$= e^{(\beta+\alpha\mu)t}e^{(\alpha\sigma)^2t^2/2}.$$

Pero ésta es la fgm de una variable aleatoria distribuida normalmente con esperanza $\alpha\mu + \beta$ y varianza $\alpha^2\sigma^2$. Así, de acuerdo con el teorema 10.3, la distribución de Y es normal.

El teorema siguiente también desempeña un papel vital en nuestro trabajo posterior.

Teorema 10.4. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes. Sea $Z = X + Y$. Sean $M_X(t)$, $M_Y(t)$ y $M_Z(t)$ las fgm de las variables aleatorias X, Y y Z, respectivamente. Entonces,

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) \tag{10.13}$$

Demostración:

$$M_Z(t) = \ = E(e^{Zt}) = E\left[e^{(X+Y)t}\right] = E(e^{Xt}e^{Yt})$$

$$= E(e^{Xt})E(e^{Yt}) = M_X(t)M_Y(t).$$

Observación: Este teorema puede generalizarse como sigue: si $X_1, \ldots, X_n$, son variables aleatorias independientes con fgm, M_{X_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces M_Z, la fgm de

$$Z = X_1 + \cdots + X_n,$$

está dada por

$$M_z(t) = M_{X_1}(t)\cdots M_{X_n}(t). \tag{10.14}$$

10.5 Propiedades reproductivas

Hay varias distribuciones de probabilidades que tienen la notable y útil propiedad siguiente: si dos (o más) variables aleatorias independientes que tienen cierta distribución se suman, la variable aleatoria que resulta

tiene una distribución del mismo tipo que la de los sumandos. Esta propiedad se llama *propiedad reproductiva*, y la estableceremos para diversas distribuciones importantes con ayuda de los teoremas 10.3 y 10.4.

EJEMPLO 10.11. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes con distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, respectivamente. Sea $Z = X + Y$. Por tanto,

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = \exp(\mu_1 t + \sigma_1^2 t^2/2)\exp(\mu_2 t + \sigma_2^2 t^2/2)$$
$$= \exp\left[(\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2\right].$$

Sin embargo, esto representa la fgm de una variable aleatoria distribuida normalmente con valor esperado $\mu_1 + \mu_2$ y varianza $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Así, Z tiene esta distribución normal. (Véase el Teorema 10.3.)

Observación: El hecho de que $E(Z) = \mu_1 + \mu_2$ y que $V(Z) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ pudo haberse obtenido inmediatamente de los resultados anteriores relacionados con las propiedades de la esperanza y la varianza. Pero para establecer que Z está otra vez distribuida *normalmente* fue necesario el uso de la fgm. (Hay otro planteamiento para llegar a este resultado que mencionaremos en el capítulo 12.)

EJEMPLO 10.12. La longitud de una varilla aleatoria distribuida normalmente con medida de 4 pulgadas y varianza 0.01 pulgada^2. Dos de tales varillas se ponen extremo con extremo y se fijan en una muesca. El largo de esta muesca es de 8 pulgadas con una tolerancia de ± 0.1 de pulgada. ¿Cuál es la probabilidad de que se ajusten las dos varillas?

Representando con L_1 y L_2 las longitudes de la varilla 1 y la varilla 2, tenemos que $L = L_1 + L_2$ está distribuida normalmente con $E(L) = 8$ y $V(L) = 0.02$. Por tanto,

$$P[7.9 \leq L \leq 8.1] = P\left[\frac{7.9 - 8}{0.14} \leq \frac{L - 8}{0.14} \leq \frac{8.1 - 8}{0.14}\right]$$
$$= \Phi(+0.714) - \Phi(-0.714) = 0.526,$$

de las tablas de la distribución normal.

Podemos generalizar el resultado anterior en el teorema siguiente:

Teorema 10.5. *(la propiedad reproductiva de la distribución normal).* Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $Z = X_1 + \cdots + X_n$. Entonces, Z tiene distribución $N(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$.
La distribución de Poisson también posee una propiedad reproductiva.

Teorema 10.6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes. Supóngase que X_i tiene una distribución de Poisson con parámetro α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y sea $Z = X_1 + \cdots + X_n$. Luego, Z tiene una distribución de Poisson con parámetro

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Demostración: Consideremos primero el caso de $n = 2$:

$$M_{X_1}(t) = e^{\alpha_1(e^t - 1)}, \quad M_{X_2}(t) = e^{\alpha_2(e^t - 1)}.$$

Por lo tanto, $M_Z(t) = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)(e^t - 1)}$. Pero ésta es la fgm de una variable aleatoria con una distribución de Poisson que tiene parámetro $\alpha_1 + \alpha_2$. Ahora podemos completar la demostración del teorema con ayuda de la inducción matemática.

EJEMPLO 10.13. Supóngase que el número de llamadas que se reciben en una central telefónica entre las 9 AM y 10 AM es una variable aleatoria X_1 con una distribución de Poisson con parámetro 3. De manera similar, el número de llamadas que se reciben entre las 10 AM y 11 AM, digamos X_2, también tiene una distribución de Poisson con parámetro 5. Si X_1 y X_2, son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que se reciban más de cinco llamadas entre las 9 AM y las 11 AM?

Sea $Z = X_1 + X_2$. Del teorema anterior, Z tiene una distribución de Poisson con parámetro $3 + 5 = 8$. Por tanto,

$$P(Z > 5) = 1 - P(Z \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-8}(8)^k}{k!}$$

$$= 1 - 0.1912 = 0.8088$$

Otra distribución con una propiedad reproductiva es la distribución χ-cuadrada.

Teorema 10.7. Supóngase que la distribución de X_i es $\chi^2_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, donde las X_i son variables aleatorias independientes. Sea $Z = X_1 + \cdots + X_k$. Entonces, Z tiene distribución χ^2_n, donde $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Demostración: De la ecuación (10.10) tenemos $M_{X_i}(t) = (1-2t)^{-n_i/2}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Luego,

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_k}(t) = (1-2t)^{-(n_1+\cdots+n_k)/2}.$$

Pero ésta es la fgm de una variable aleatoria que tiene la distribución χ^2_n.

Ahora podemos dar una de las razones de la gran importancia de la distribución χ-cuadrada. En el ejemplo 9.9 encontramos que si X tiene distribución $N(0,1)$, X^2 tiene distribución χ^2_1. Combinando esto con el teorema 10.7 tenemos el resultado siguiente.

Teorema 10.8. Supóngase que $X_1, \ldots, X_k$ son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0,1)$. Entonces, $S = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_k^2$ tiene distribución χ^2_k.

EJEMPLO 10.14. Supóngase que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0,1)$. Sea $T = \sqrt{X_1^2 + \cdots + X_n^2}$. De nuestra exposición previa sabemos que T^2 tiene distribución χ^2_n.

Para encontrar la fdp de T, llamada h, proseguiremos como es usual:

$$\begin{aligned} H(t) &= P(T \le t) = P(T^2 \le t^2) \\ &= \int_0^{t^2} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2}\, dz. \end{aligned}$$

Por tanto tenemos

$$\begin{aligned} h(t) &= H'(t) \\ &= \frac{2t}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} (t^2)^{n/2-1} e^{-t^2/2} \\ &= \frac{2t^{n-1} e^{-t^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \quad \text{si} \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Observaciones: a) Si $n = 2$, la distribución anterior se conoce como *distribución de Rayleigh*. (Véase el Prob. 9.7.)

b) Si $n = 3$, la distribución anterior se conoce como *distribución de Maxwell* (o, algunas veces, como distribución de velocidad de Maxwell) y tiene la siguiente interpretación importante. Supóngase que tenemos gas en un depósito cerrado. Representemos con (X, Y, Z) las componentes de la velocidad de una molécula escogida al azar. Supondremos que X,Y y Z son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0, \sigma^2)$. (Suponer que X, Y y Z tienen la misma distribución, significa que la presión en el gas es la misma en todas direcciones. Suponer que las esperanzas son iguales a cero significa que el gas no está escapándose.) Por lo tanto, la *rapidez* de la molécula (es decir, la magnitud de su velocidad) está dada por $S = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. Observemos que X/σ, Y/σ y Z/σ están distribuidas de acuerdo con $N(0, 1)$. Así, $S/\sigma = \sqrt{(X/\sigma)^2 + (Y/\sigma)^2 + (Z/\sigma)^2}$ tiene distribución de Maxwell. Por tanto, g, la fdp de la rapidez S, está dada por

$$g(s) = \frac{2\sigma(\sigma s)^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2 s^2/2}, \quad s \geq 0.$$

La gráfica de g se presenta en la figura 10.2 para $\sigma = 2$. Observe que valores muy grandes o muy pequeños de S son bastante improbables. (Puede demostrarse que la constante σ, que aparece como un parámetro en la distribución anterior, tiene la siguiente interpretación física: $\sigma = \sqrt{kT/M}$, donde T es la temperatura absoluta, M es la masa de la molécula y k se conoce como la constante de Boltzmann.)

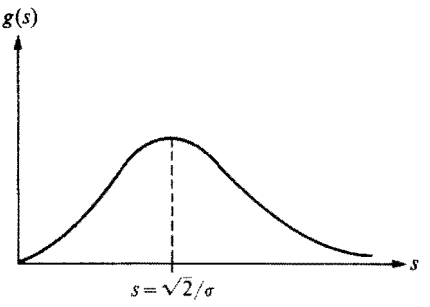


FIGURA 10.2

Hemos expuesto algunas distribuciones que tiene la propiedad reproductiva. Consideremos la distribución exponencial que, en sentido estricto *no* posee la propiedad reproductiva, pero que, sin embargo, posee una propiedad análoga.

Sean X_i, con $i = 1, 2, \ldots, r$, r variables aleatorias independientes con idéntica distribución exponencial con parámetro α. Entonces, de la ecuación (10.7) tenemos

$$M_{X_i}(t) = \alpha/(\alpha - t).$$

Luego, si $Z = X_1 + \cdots + X_r$, tenemos $M_Z(t) = [\alpha/\alpha - t]^r$, que precisamente es la función generadora de momentos de la distribución

gama con parámetro α y r (Ec. 10.9.) A menos que $r = 1$, ésta no es la fgm de una distribución exponencial; así, esta distribución no posee una propiedad reproductiva, pero tenemos una característica muy interesante de la distribución gama que se resume en el teorema siguiente.

Teorema 10.9. Sea $Z = X_1 + \cdots + X_r$, donde las X_i son r variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una de las cuales tiene una distribución exponencial con el (mismo) parámetro α. Se cumple, entonces, que Z tiene una distribución gama con parámetros α y r.

Observaciones: a) El teorema 10.9 no se cumple si los parámetros de las diversas distribuciones exponenciales son diferentes. Esto se hace evidente cuando consideramos la fgm de la suma resultante de las variables aleatorias.

b) El *corolario* siguiente del teorema anterior tiene mucha importancia en ciertas aplicaciones estadísticas: la variable aleatoria $W = 2\alpha Z$ tiene distribución χ^2_{2r}. Ésta es una consecuencia inmediata del hecho de que $M_W(t) = M_Z(2\alpha t) = [\alpha/(\alpha - 2\alpha t)]^r = (1 - 2t)^{-2r/2}$. Comparando esto con la ecuación (10.10) resulta el corolario anterior. Así podemos usar la distribución tabulada de χ-cuadrada para calcular ciertas probabilidades asociadas con Z. Por ejemplo, $P(Z \leq 3) = P(2\alpha Z \leq 6\alpha)$. Esta última probabilidad puede obtenerse directamente de las tablas de la distribución χ-cuadrada, si se dan α y r.

10.6 Sucesiones de variables aleatorias

Supóngase que tenemos una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ Cada una de ellas puede describirse en términos de F_i, su fda, donde $F_i(t) = P(X_i \leq t)$, $i = 1, 2, \ldots$ Muy a menudo nos interesa lo que sucede a F_i cuando $i \to \infty$. Es decir ¿hay alguna *función de distribución límite* F correspondiente a alguna variable aleatoria X tal que, de alguna manera, las variables aleatorias X_i converjan a X? La respuesta es afirmativa en muchos casos, y hay un procedimiento bastante directo para determinar F.

Tal situación puede aparecer cuando consideramos n observaciones independientes de una variable aleatoria X, llamémoslas $X_1, \ldots, X_n$. Podríamos interesarnos por el promedio aritmético de esas observaciones, $\overline{X}_n = (1/n)(X_1 + \cdots + X_n)$. De nuevo, $\overline{X}_n$ es una variable aleatoria. Sea $\overline{F}_n$ la fda de $\overline{X}_n$. Podría ser de interés aprender lo que sucede a la distribución de probabilidades de $\overline{X}_n$ cuando n llega a ser grande. Así,

nuestro problema implica la conducta límite de $\overline{F}_n$ cuando $n \to \infty$. El teorema siguiente, establecido sin demostración, nos permitirá resolver éste y otros problemas semejantes.

Teorema 10.10. Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias con fda $F_1, \ldots, F_n, \ldots$ y fgm $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ Supóngase que $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$, donde $M(0) = 1$. Luego, M(t) es la fgm de la variable aleatoria X cuya fda F está dada por $\lim_{n\to\infty} F_n(t)$.

Observación: El teorema 10.10 establece que para obtener la distribución límite buscada es suficiente estudiar las funciones generadoras de momentos de las variables aleatorias que se consideran. Obtenemos el valor límite de las sucesiones $M_1, \ldots, M_n, \ldots$, llamado $M(t)$. Debido a la propiedad de unicidad de la fgm, existe sólo una distribución de probabilidades que corresponde a la fgm $M(t)$. Podemos aceptar M como la fgm de una distribución conocida (como la normal, de Poisson, etc.) o bien podemos usar métodos más avanzados para determinar la distribución de probabilidades de M. Así como podemos obtener la fgm conociendo la fdp, también podemos obtener (en condiciones completamente generales) la fdp conociendo la fgm. Esto implicaría ciertos teoremas de inversión, por lo que aquí no lo estudiaremos.

10.7 Nota final

Hemos visto que la fgm puede ser una herramienta muy poderosa para estudiar diversos aspectos de las distribuciones de probabilidades. En particular, encontramos muy útil el uso de la fgm para estudiar sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y obtener diversas leyes reproductivas. Estudiaremos otra vez las sumas de variables aleatorias independientes en el capítulo 12, sin usar la fgm, pero con métodos semejantes a los que empleamos cuando estudiamos el producto y el cociente de variables aleatorias en el capítulo 6.

PROBLEMAS

10.1. Supóngase que X tiene fdp dada por

$$f(x) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

a) Determinar la fgm de X.

b) Usando la fgm, calcular $E(X)$ y $V(X)$ y verificar la respuesta. (Véase la Observación de la p. 232.)

10.2. *a*) Encontrar la fgm del voltaje (*incluyendo* el ruido tal como se expuso en el problema 7.25.

b) Usando la fgm, obtener el valor esperado y la varianza de este voltaje.

10.3. Suponer que X tiene la fdp siguiente

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}, \quad x \geq a.$$

(Ésta es conocida como una *distribución exponencial con dos parámetros.*)

a) Encontrar la fgm de X.

b) Usando la fgm, encontrar $E(X)$ y $V(X)$.

10.4. Sea X el resultado cuando se lanza un dado regular.

a) Encontrar la fgm de X.

b) Usando la fgm, encontrar $E(X)$ y $V(X)$.

10.5. Encontrar la fgm de la variable aleatoria X del problema 6.7. Usando la fgm, encontrar $E(X)$ y $V(X)$.

10.6. Supóngase que la variable aleatoria continua X tiene fdp

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

a) Obtener la fgm de X.

b) Usando la fgm, encontrar $E(X)$ y $V(X)$.

10.7. Usando la fgm, demostrar que si X y Y son variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente, entonces $Z = aX + bY$ está de nuevo distribuida normalmente, donde a y b son constantes.

10.8. Suponer que la fgm de una variable aleatoria X es de la forma

$$M_X(t) = (0.4e^t + 0.6)^8$$

a) ¿Cuál es la fgm de la variable aleatoria $Y = 3X + 2$?

b) Calcular $E(X)$.

c) ¿Se puede verificar la respuesta *b*) por algún otro método? [Trátese de "reconocer" $M_x(t)$.]

10.9. Varias resistencias, R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, se ponen en serie en un circuito. Suponer que cada una de las resistencias está distribuida normalmente con $E(R_i) = 10$ ohms y $V(R_i) = 0.16$:

a) Si $n = 5$, ¿cuál es la probabilidad de que la resistencia del circuito sobrepase los 49 ohms?

b) ¿Cuál debe ser el valor de n de manera que la probabilidad de que la resistencia total exceda los 100 ohms sea aproximadamente 0.05?

10.10. En un circuito se ponen n resistencias en serie. Supóngase que cada una de las resistencias está distribuida uniformemente en $[0, 1]$ y supóngase, además, que todas las resistencias son independientes. Sea R la resistencia total.

a) Encontrar la fgm de R.

b) Usando la fgm, obtener $E(R)$ y $V(R)$. Verificar la respuesta con un cálculo directo.

10.11. Si X tiene una distribución χ^2_n, utilizando la fgm demostrar que $E(X) = n$ y $V(X) = 2n$.

10.12. Supóngase que V, la velocidad de un objeto (cm/seg), tiene distribución $N(0, 4)$. Si $K = mV^2/2$ ergs es la energía cinética del objeto (donde m = masa), encontrar la fdp de K. Si $m = 10$ grs, calcular $P(K \leq 3)$.

10.13. Supóngase que la duración de un artículo está distribuida exponencialmente con parámetro 0.5. Supóngase que 10 de tales artículos se instalan en forma sucesiva, de manera que el i-ésimo artículo se instala "inmediatamente" después de que el $(i-1)$ artículo ha fallado. Sea T_i el tiempo para que ocurra la falla del i-ésimo artículo, $i = 1, 2, \ldots, 10$ medido siempre desde el tiempo de instalación. Por lo tanto $S = T_1 + \cdots + T_{10}$ representa el tiempo total de funcionamiento de los 10 artículos. Suponiendo que las T_i son independientes, calcular $P(S \geq 15.5)$.

10.14. Supóngase que $X_1, \ldots, X_{80}$ son variables aleatorias independientes, donde cada una tiene distribución $N(0, 1)$. Calcular $P[X_1^2 + \cdots + X_{80}^2 > 77]$. [*Sugerencia:* Usar el teorema 9.2.]

10.15. Demostrar que si X_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ representa el número de éxitos en n_i repeticiones de un experimento, donde $P(\text{éxito}) = p$, para toda i, entonces $X_1 + \cdots + X_k$ tiene una distribución binomial. (Esto es, la distribución binomial tiene la propiedad reproductiva.)

10.16. (*La distribución de Poisson y la multinomial.*) Supóngase que X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son variables aleatorias distribuidas independientemente con una distribución de Poisson con parámetros α_i, $i = 1, \ldots, n$. Sea $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces la distribución de probabilidades condicional conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ dada $X = x$ está dada por una distribución multinomial. Esto es $P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n \mid X = x) = x!/(x_1! \ldots x_n!)(\alpha_1/\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{x_1} \ldots (\alpha_n/\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{x_n}$.

10.17. Obtener la fgm de una variable aleatoria que tiene una distribución geométrica. ¿Esta distribución posee una propiedad reproductiva en la adición?

10.18. Si la variable aleatoria X tiene una fgm dada por $M_X(t) = 3/(3-t)$, obtener la desviación estándar de X.

10.19. Encontrar la fgm de una variable aleatoria que está distribuida uniformemente en $(-1, 2)$.

10.20. Cierto proceso industrial produce un gran número de cilindros de acero cuyas longitudes están distribuidas normalmente con promedio de 3.25 pulgadas y desviación estándar de 0.05 pulgada. Si se eligen al azar dos de tales cilindros y se ponen extremo con extremo, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud combinada sea menor que 6.60 pulgadas?

Observación: Al calcular $M'_X(t)$, en $t = 0$, puede aparecer una forma indeterminada. Es decir, $M'_X(0)$ puede ser de la forma $0/0$. En tal caso debemos tratar de aplicar la regla de L'Hôpital. Por ejemplo, si X está distribuida uniformemente en $[0, 1]$ con facilidad encontramos que $M_X(t) = (e^t - 1)/t$ y $M'_X(t) = (te^t - e^t + 1)/t^2$. Por tanto, para $t = 0$, $M'_X(t)$ es indeterminada. Aplicando la regla de L'Hôpital encontramos que $\lim_{t\to 0} M'_X(t) = \lim_{t\to 0} te^t/2t = \frac{1}{2}$. Esto concuerda, puesto que $M'_X(0) = E(X)$, que es igual a $\frac{1}{2}$ para la variable aleatoria descrita aquí.

11

Aplicaciones a la teoría de la confiabilidad

11.1 Conceptos básicos

En este capítulo estudiaremos un área creciente y muy importante de aplicación de algunos de los conceptos presentados en los capítulos anteriores.

Supóngase que consideramos un componente (o un conjunto completo de componentes armados en un sistema) que se somete a una especie de "tensión". Podría ser una barra de acero bajo una carga, un fusible puesto en un circuito, un ala de aeroplano bajo la influencia de fuerzas, o un instrumento electrónico puesto en servicio. Supóngase que se puede definir un estado que designaremos como "falla" para cualquier componente (o el sistema). Es decir, la barra de acero puede agrietarse o romperse, el fusible puede quemarse, el ala puede doblarse, o el instrumento electrónico puede dejar de funcionar.

Si tal componente se pone en condiciones de tensión durante un tiempo determinado, $t = 0$, y lo observamos hasta que falla (es decir, deja de funcionar correctamente debido a la tensión aplicada), el *tiempo para que ocurra la falla* o la *duración* llamémoslo T, puede considerarse como una variable aleatoria continua con una fdp f. Hay evidencias

empíricas que indican que el valor de T no puede predecirse con un modelo determinista. Es decir, componentes "idénticos" sometidos a tensiones "idénticas" fallarán en tiempos diferentes e impredecibles. Algunos fallarán muy al iniciar su funcionamiento y otros en etapas posteriores. Por supuesto, "la manera de fallar" dependerá del tipo de artículo que se considera. Por ejemplo, un fusible fallará de improviso en el sentido de que en un momento dado funciona perfectamente y al momento siguiente no funciona. Por otra parte, una barra de acero bajo una carga pesada se debilitará probablemente en el transcurso de un largo periodo de tiempo. En cualquier caso, el uso de un modelo probabilístico, considerado T como una variable aleatoria, parece ser el único planteamiento realista. Presentamos ahora el siguiente concepto importante.

Definición. La *confiabilidad* de un componente (o sistema) en el tiempo t, llamémosla $R(t)$, está definida como $R(t) = P(T > t)$, donde T es la duración del componente R se llama *función de confiabilidad.*

Observación: Aunque el término "confiabilidad" tiene diversos significados técnicos, la acepción anterior es la que en general se acepta. La definición dada aquí expresa simplemente que la confiabilidad de un componente es igual a la probabilidad de que el componente no falle durante el intervalo $[0, t]$ (o, equivalentemente, la confiabilidad es igual a la probabilidad de que el componente aún funcione después de un tiempo t). Por ejemplo, si para un artículo particular, $R(t_1) = 0.90$, esto significa que casi el 90% de tales artículos, usados en ciertas condiciones, todavía funcionan después de un tiempo t_1.

En términos de la fdp de T, llamémosla f, tenemos

$$R(t) = \int_t^\infty f(s)\ ds\,.$$

En términos de la fda de T, llamémosla F, tenemos

$$R(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t).$$

Además de la función confiabilidad R, otra función desempeña un papel importante para describir las partes que fallan de un artículo.

Definición. La *tasa de falla* (instantánea) Z (algunas veces llamada *función de riesgo*) asociada con la variable aleatoria T está dada por

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}, \tag{11.1}$$

definida para $F(t) < 1$.

Observación: A fin de interpretar $Z(t)$ consideremos la probabilidad condicional

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t),$$

es decir, la probabilidad de que el artículo falle durante las próximas Δt unidades de tiempo, dado que el artículo está funcionando correctamente en el instante t. Aplicando la definición de probabilidad condicional, podemos escribir lo anterior como

$$\begin{aligned} P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t) &= \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} \\ &= \int_t^{t+\Delta t} f(x)\, dx \,/ P(T > t) = \Delta t f(\xi)/R(t), \end{aligned}$$

donde $t \leq \xi \leq t + \Delta t$.

La última expresión (para una Δt pequeña y suponiendo que f es continua en t por la derecha) es aproximadamente igual a $\Delta t Z(t)$. Así, en un lenguaje informal, $\Delta t Z(t)$ representa la proporción de artículos que estará entre t y $t + \Delta t$, de aquellos artículos que aún funcionan en el instante t:

De lo anterior observamos que f, la fdp de T, determina unívocamente la tasa de falla Z. Indicaremos ahora que lo recíproco también es válido: la tasa de falla Z determina unívocamente la fdp f.

Teorema 11.1. Si T, el tiempo para que ocurra la falla, es una variable aleatoria continua con fdp f y si $F(0) = 0$, donde F es la fda de T, entonces f puede expresarse en términos de la tasa de falla Z como sigue:

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)\, ds}. \tag{11.2}$$

Demostración: Puesto que $R(t) = 1 - F(t)$, tenemos $R'(t) = -F'(t) = -f(t)$. Luego,

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}.$$

Integrando ambos miembros de 0 a t:

$$\int_0^t Z(s)\ ds = -\int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)}\ ds = -\ln R(s)\,|_0^t$$

$$= -\ln R(t) + \ln R(0) = -\ln R(t),$$

suponiendo que $\ln R(0) = 0$ lo que es válido si y sólo si $R(0) = 1$. [Esta última condición se satisface si $F(0) = 0$. Esto simplemente expresa que la probabilidad de una falla *inicial* es igual a cero; haremos esta suposición durante el resto de la exposición.] Por tanto,

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)\ ds}$$

Así,

$$f(t) = F'(t) = \frac{d}{dt}\,[1 - R(t)] = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)\ ds}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la tasa de falla Z determina unívocamente la fdp f.

Existe una relación interesante entre la función de confiabilidad R y el tiempo promedio de falla, $E(T)$.

Teorema 11.2. Si $E(T)$ es finito, entonces,

$$E(T) = \int_0^\infty R(t)\ dt\,. \tag{11.3}$$

Demostración: Considerar

$$\int_0^\infty R(t)\ dt = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(s)\ ds\right] dt\,.$$

Integrando por partes, hacemos $\int_t^\infty f(s)\ ds = u$ y $dt = dv$. Luego, $v = t$ y $du = -f(t)\ dt$. Así,

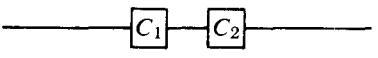
$$\int_0^\infty R(t)\ dt = t\int_t^\infty f(s)\ ds\,|_0^\infty + \int_0^\infty tf(t)\ dt\,.$$

La segunda integral del segundo miembro representa $E(T)$. Por tanto, la demostración está completa si podemos demostrar que $t\int_0^\infty f(s)\,ds$ se anula en $t = 0$ y cuando $t \to \infty$. La anulación en $t = 0$ es inmediata. Sabiendo que $E(T)$ es finita, el lector puede completar la demostración.

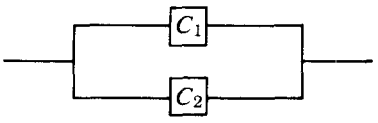
Los conceptos de confiabilidad y tasa de falla están entre las herramientas necesarias más importantes para un estudio de los "modelos de falla". Nos ocuparemos sobre todo de las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las "leyes de falla" fundamentales que razonablemente se pueden suponer? (Es decir, ¿qué forma tendría la fdp de T?)

b) Supóngase que tenemos dos componentes, C_1 y C_2, con leyes de falla conocidas. Suponiendo que dichos componentes se combinan en serie



o en paralelo



para formar un sistema, ¿cuál es la ley de falla (o confiabilidad) del sistema?

La pregunta cuál es una ley de falla "razonable" nos remite a un problema que hemos presentado antes: ¿cuál es un modelo matemático razonable para la descripción de algunos fenómenos observables? Desde un punto de vista estrictamente matemático, de hecho podemos suponer cualquier fdp para T y luego estudiar sólo las consecuencias de esta suposición. Sin embargo, si estamos interesados en tener un modelo que represente (lo más exactamente posible) los datos de fallas disponibles en realidad, nuestra elección del modelo debe tener esto en cuenta.

11.2 La ley normal de falla

Hay muchos tipos de componentes cuya conducta de falla puede representarse con la distribución normal. Es decir, si T es la duración de un artículo, su fdp está dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right).$$

[Nuevamente observamos que el tiempo para que ocurra la falla T, debe ser mayor que, o igual a cero. Por tanto, para que el modelo anterior sea aplicable debemos insistir en que $P(T < 0)$ esté cercana a cero.] Como la forma de la fdp normal lo indica, una ley normal de falla implica que la mayoría de los artículos fallan alrededor del tiempo promedio de falla, $E(T) = \mu$ y el número de fallas disminuye (simétricamente) cuando $|T - \mu|$ aumenta. Una ley normal de falla significa que alrededor del 95.72% de las fallas tiene lugar para los valores de t que satisfacen $\{t \mid |t - \mu| < 2\sigma\}$. (Véase la Fig. 11.1.)

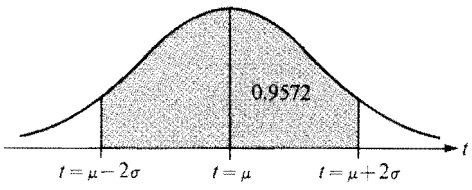


FIGURA 11.1*

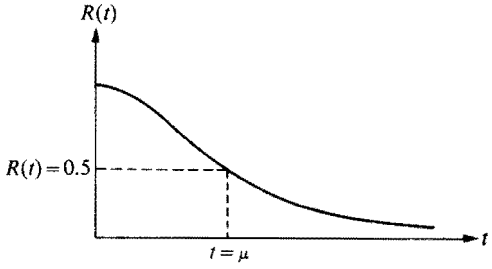


FIGURA 11.2

La función de confiabilidad de la ley normal de falla puede expresarse mediante la función de distribución normal acumulativa tabulada Φ, como sigue:

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T > t) = 1 - P(T \leq t) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right) dx \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

N.del E. Obsérvese que $P[t \mid |t - \mu| < 2\sigma] = P[t \mid -2 < \frac{t-\mu}{\sigma} < 2] = \Phi(2) - \Phi(-2)$. De la tabla 1, $\Phi(2) = 0.9772$ y $\Phi(-2) = 0.0228$, por tanto, $P[t \mid |t - \mu| < 2\sigma] = 0.9544$ y no 0.9572 como se indica en la figura.

La figura 11.2 muestra una curva general de confiabilidad para una ley normal de falla. Nótese que para obtener una confiabilidad alta (0.90 o mayor), el tiempo de operación debe ser considerablemente menor que μ, la duración esperada.

EJEMPLO 11.1. Supóngase que la duración de un componente está distribuida normalmente con una desviación estándar igual a 10 (horas). Si el componente tiene una confiabilidad de 0.99 para un periodo de operación de 100 horas, ¿cuál debería ser su duración esperada?

La ecuación anterior se transforma en

$$0.99 = 1 - \Phi\left(\frac{100 - \mu}{10}\right).$$

De las tablas de la distribución normal se tiene $(100 - \mu)/10 = -2.33$. Por lo tanto $\mu = 123.3$ horas.

La ley normal de falla representa un modelo apropiado para los componentes en los cuales la falla se debe a algunos efectos de "desgaste". Sin embargo, ésta no es una de las más importantes leyes de falla que existen.

11.3 La ley exponencial de falla

Una de las leyes de falla más relevantes es aquella cuyo tiempo para que ocurra la falla se describe mediante la distribución exponencial. Podemos describirla de varias maneras, pero probablemente la más sencilla es suponer que la tasa de fallas es *constante*, es decir $Z(t) = \alpha$. Una consecuencia inmediata de esta suposición es, según la ecuación (11.2), que la fdp asociada con el tiempo para que ocurra la falla, T, está dada por

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

El recíproco es también inmediato: si f tiene la forma anterior, $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$ y, por tanto, $Z(t) = f(t)/R(t) = \alpha$. Así, tenemos el siguiente resultado importante.

Teorema 11.3. Sea T, el tiempo para que ocurra una falla, una variable aleatoria continua que toma todos los valores no negativos.

Entonces, T tiene una distribución exponencial si y sólo si tiene una tasa constante de fallas.

Observación: Puede interpretarse que la suposición de una tasa constante de fallas significa que después de que el artículo se ha usado, la probabilidad de que falle no ha cambiado. Dicho de una manera más informal, no hay efecto de "desgaste" cuando se estipula el modelo exponencial. Existe otra manera de expresar lo anterior, la cual hace este punto aún más evidente.

Considérese para $\Delta t > 0$, $P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t)$. Ésta representa la probabilidad de que el artículo falle durante las siguientes Δt unidades, dado que no ha fallado en el instante t. Aplicando la función de probabilidad condicional, encontramos que

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha(t+\Delta t)}}{e^{-\alpha t}} = 1 - e^{-\alpha \Delta t}.$$

Por tanto, esta probabilidad condicional es independiente de t y sólo depende de Δt. Es en este sentido que podemos decir que una ley exponencial de falla implica que la probabilidad de fallar es independiente del pasado. Es decir, mientras el artículo funcione es "tan bueno como si fuera nuevo".

Si desarrollamos el segundo miembro de la expresión anterior en una serie de Maclaurin obtenemos

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t \mid T > t) = 1 - \left[1 - \alpha \Delta t + \frac{(\alpha \Delta t)^2}{2!} - \frac{(\alpha \Delta t)^3}{3!} + \cdots\right]$$

$$= \alpha \Delta t + h(\Delta t).$$

donde $h(\Delta t)$ llega a ser despreciable para Δt pequeña. Así para Δt suficientemente pequeña, la probabilidad anterior es directamente proporcional a Δt.

Para muchos tipos de componentes, la hipótesis que conduce a la ley exponencial de falla no es sólo intuitivamente atractiva sino que en realidad está sustentada en evidencias empíricas. Por ejemplo, es muy razonable suponer que un fusible o un cojinete de rubíes es "tan bueno como si fuera nuevo" mientras esté funcionando. Es decir, si el fusible no se ha fundido, prácticamente está como nuevo. Tampoco el cojinete cambiará mucho debido al uso. En estos casos, la ley exponencial de falla representa un modelo apropiado para estudiar las características que fallan en un artículo.

Sin embargo, aquí debemos hacer una advertencia. Hay muchas situaciones que implican estudios de fallas para las cuales las suposiciones básicas que conducen a una ley exponencial no serán satisfechas. Por ejemplo, si una pieza de acero se expone a una tensión continua, evidentemente sufrirá un deterioro y, por tanto, se debe considerar un modelo distinto al exponencial.

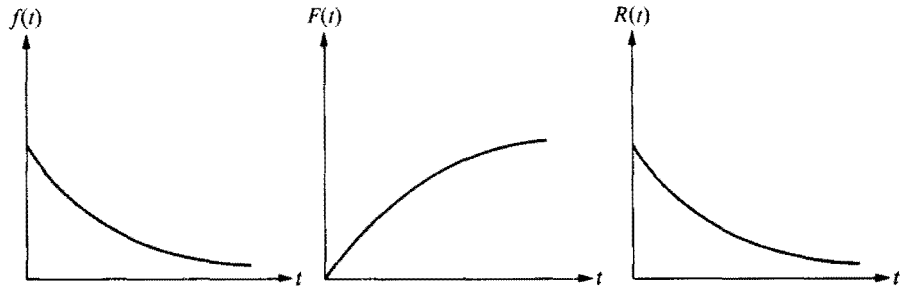


FIGURA 11.3

Aunque antes discutimos las distintas propiedades de la distribución exponencial, resumámosla nuevamente a fin de tenerla disponible para el objetivo presente. (Véase la Fig. 11.3.) Si T, el tiempo para que ocurra la falla, está distribuida exponencialmente (con parámetro α), tenemos

$$E(T) = 1/\alpha; \qquad V(T) = 1/\alpha^2;$$

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}; \quad R(t) = e^{-\alpha t}.$$

EJEMPLO 11.2. Si se da el parámetro α y se especifica $R(t)$, podemos encontrar t, el número de horas de operación. Así, si $\alpha = 0.01$ y $R(t)$ es igual a 0.90, tenemos

$$0.90 = e^{-0.01t}$$

Luego $t = -100 \ln(0.90) = 10.54$ horas. Por tanto, si los 100 componentes funcionan durante 10.54 horas, aproximadamente 90 no fallarán durante ese periodo.

Observaciones: a) Es muy importante darse cuenta de que en el caso exponencial podemos identificar el *tiempo* de operación (de algún valor inicial fijo

arbitrario) con la *edad* para funcionar. Porque en este caso, un artículo que no ha fallado es tan bueno como si fuera nuevo y, por tanto, su conducta durante cualquier periodo de servicio depende sólo de la longitud de ese periodo y no de su historia anterior. Sin embargo, cuando se supone una ley de falla no exponencial (tal como la ley normal o una de las distribuciones que consideraremos en breve), la historia pasada tiene efecto sobre el comportamiento del artículo. Por tanto, mientras podamos definir T como el tiempo en servicio (hasta la falla) para el caso exponencial, debemos definir T como la duración *total* hasta la falla para los casos no exponenciales.

b) La distribución exponencial, que hemos presentado en relación con la duración de los componentes, tiene muchas otras aplicaciones importantes. En realidad, cada vez que una variable aleatoria continua T que toma valores no negativos satisface la suposición $P(T > s + t \mid T > s) = P(T > t)$ para toda s y t, T tendrá una distribución exponencial. Así, si T representa el tiempo que demora un átomo radioactivo en desintegrarse, podemos suponer que T está distribuida exponencialmente, puesto que la suposición anterior parece satisfacerse.

EJEMPLO 11.3. No es irrazonable suponer que cuesta más producir un artículo con una gran duración esperada que uno con una esperanza pequeña de duración. Específicamente suponemos que el costo C para producir un artículo es la siguiente función de μ, el tiempo promedio para que ocurra la falla,

$$C = 3\mu^2.$$

Supóngase que se obtiene una utilidad de D dólares por cada hora que el artículo está en servicio. Luego, la utilidad por artículo está dada por

$$P = DT - 3\mu^2,$$

donde T es el número de horas que el artículo funciona correctamente. Por tanto, la ganancia esperada está dada por

$$E(P) = D\mu - 3\mu^2.$$

Para encontrar para qué valor de μ esta cantidad es máxima, simplemente hacemos $dE(P)/d\mu$ igual a cero y resolvemos para μ. El resultado es $\mu = D/6$ y, por tanto, la utilidad esperada máxima por artículo es igual a $E(P)_{\text{máx}} = D^2/12$.

EJEMPLO 11.4. Reconsideremos el ejemplo 11.3, haciendo las siguientes suposiciones adicionales. Supóngase que T, el tiempo para que ocurra la falla, está distribuida exponencialmente con parámetro α. Luego μ, el tiempo esperado para que ocurra la falla, está dada por $\mu = 1/\alpha$. Supóngase, además, que si el artículo no funciona correctamente al menos un número específico de horas, digamos t_0, se fija un castigo igual a $K(t_0 - T)$ dólares, donde $T(T < t_0)$ es el tiempo en el cual tiene lugar la falla. Por tanto, la utilidad por artículo está dada por

$$P = DT - 3\mu^2 \quad \text{si} \quad T > t_0,$$

$$= DT - 3\mu^2 - K(t_0 - T) \quad \text{si} \quad T < t_0.$$

Luego, la utilidad esperada (por artículo) puede expresarse como

$$E(P) = D\int_{t_0}^{\infty} t\alpha e^{-\alpha t}\, dt - 3\mu^2 e^{-\alpha t_0}$$

$$+ (D + K)\int_{0}^{t_0} t\alpha e^{-\alpha t}\, dt - (3\mu^2 + Kt_0)(1 - e^{-\alpha t_0}).$$

Después de algunas integraciones inmediatas, lo anterior puede escribirse como

$$E(P) = D\mu - 3\mu^2 + K\left[\mu - \mu e^{-t_0/\mu} - t_0\right].$$

Nótese que si $K = 0$, esto se reduce al resultado obtenido en el ejemplo 11.3. Podríamos formularnos una pregunta análoga a la que apareció en el ejemplo previo: ¿para qué valor de μ toma $E(P)$ su valor máximo? No proseguiremos con los detalles de este problema, puesto que implica la solución de una ecuación trascendental que debe resolverse numéricamente.

11.4 La ley exponencial de falla y la distribución de Poisson

Hay una conexión muy cercana entre la ley exponencial de falla descrita en la sección anterior y un proceso de Poisson. Supóngase que la falla ocurre debido a la aparición de ciertos accidentes "aleatorios". Éstos pueden deberse a fuerzas externas tales como una repentina ráfaga de viento o una caída (o aumento) de voltaje o por causas internas tales

como una desintegración química o un mal funcionamiento mecánico. Sea X_t igual al número de accidentes que ocurren en un intervalo de tiempo de longitud t y supongamos que X_t, $t \geq 0$, constituye un *proceso de Poisson*. Es decir, para cualquier t fija, la variable aleatoria X_t tiene una distribución de Poisson con parámetro αt. Supóngase que la falla en $[0, t]$ se produce si y sólo si al menos uno de tales accidentes ocurre. Sea T el tiempo para que ocurra la falla, que supondremos es una variable aleatoria continua; entonces,

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t).$$

Ahora, $T > t$ si y sólo si *ningún* accidente ocurre en $[0, t]$. Esto sucede si y sólo si $X_t = 0$. Por lo tanto,

$$F(t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\alpha t}$$

Esto representa la fda de una ley exponencial de falla. Encontramos así que la "causa" anterior de las fallas implica una ley exponencial de falla.

Las ideas anteriores se pueden *generalizar* de dos maneras.

a) Nuevamente suponemos que los accidentes aparecen de acuerdo con un proceso de Poisson. Suponemos, además, que cada vez que aparece tal accidente hay una probabilidad constante p de que éste no producirá fallas. Por tanto, si T es el tiempo para que ocurra la falla, tenemos, como antes,

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t).$$

Esta vez, $T > t$ si y sólo si (durante $[0, t]$) no ocurre ningún accidente, *o* sucede un accidente *y* ninguna falla aparece, *o* dos accidentes ocurren *y* no aparece ninguna falla, o... Por tanto,

$$F(t) = 1 - \left[e^{-\alpha t} + (\alpha t)e^{-\alpha t}p + (\alpha t)^2 \frac{e^{-\alpha t}}{2!}p^2 + \cdots\right]$$

$$= 1 - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t p)^k}{k!} = 1 - e^{-\alpha t}e^{\alpha t p} = 1 - e^{-\alpha(1-p)t}.$$

Así, T tiene una ley exponencial de fallas con parámetro $\alpha(1 - p)$. (Nótese que si $p = 0$, tenemos el caso expuesto previamente.)

b) Supóngase de nuevo que los accidentes aparecen de acuerdo con un proceso de Poisson. Esta vez supondremos que las fallas ocurren cada vez que r o más accidentes ($r \geq 1$) ocurren durante un intervalo de longitud t. Por tanto, si T es el tiempo para que ocurra la falla, tenemos, como antes,

$$F(t) = 1 - P(T > t).$$

En este caso, $T > t$ si y sólo si $(r - 1)$ o menos accidentes ocurren. Por tanto,

$$F(t) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!}.$$

De acuerdo con la ecuación (9.17), lo anterior es igual a $\int_0^t [\alpha/(r - 1)!](\alpha s)^{r-1} e^{-\alpha s}\, ds$ y, por tanto, representa la fda de una distribución gama. Así, encontramos que la "causa" anterior para que ocurra la falla sigue una *ley gama de fallas*. (Por supuesto, si $r = 1$, ésta se transforma en una distribución exponencial.)

11.5 La ley de fallas de Weibull

Modifiquemos la noción de tasa constante de fallas que condujo a la ley exponencial de falla. Supóngase que la tasa de fallas Z, asociada con T, la duración de un artículo, tiene la forma siguiente:

$$Z(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}, \tag{11.4}$$

donde α y β son constantes positivas. De la ecuación (11.2) obtenemos la expresión siguiente para la fdp de T:

$$f(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}, \quad t > 0, \alpha, \beta > 0. \tag{11.5}$$

Se dice que la variable aleatoria con fdp dada por la ecuación (11.5) tiene una *distribución de Weibull*. La figura 11.4 muestra la fdp para $\alpha = 1$ y $\beta = 1, 2, 3$. La función de confiabilidad R está dada por $R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$ que es una función decreciente de t.

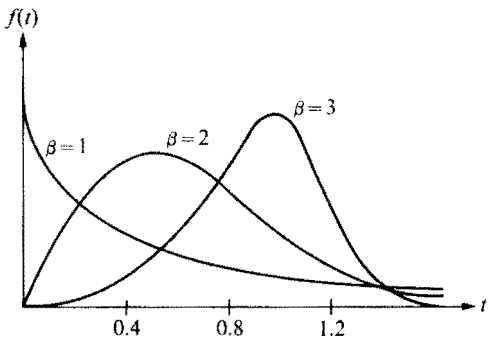


FIGURA 11.4

Observación: La distribución exponencial es un caso especial de distribución de Weibull, puesto que obtenemos la distribución exponencial si hacemos $\beta = 1$ en la ecuación (11.4). La suposición (Ec. 11.4) establece que $Z(t)$ no es una constante, sino que es proporcional a las potencias de t. Por ejemplo, si $\beta = 2$, Z es una función lineal de t; si $\beta = 3$, Z es una función cuadrática de t, etc. Así, Z es una función creciente, decreciente o constante de t, según el valor de β, como se indica en la figura 11.5.

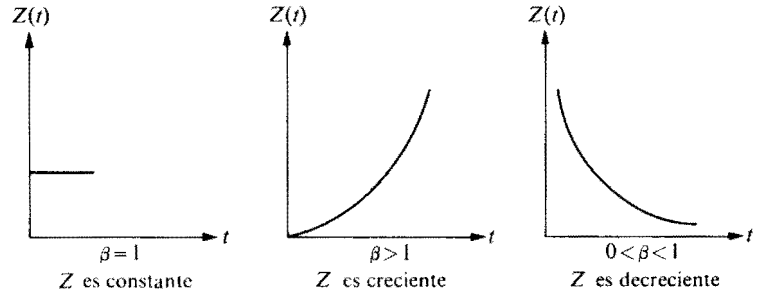


FIGURA 11.5

Teorema 11.4. Si la variable aleatoria T tiene una distribución de Weibull con fdp dada por la ecuación (11.5), tenemos

$$E(T) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right), \tag{11.6}$$

$$V(T) = \alpha^{-2/\beta}\left\{\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right]^2\right\}. \tag{11.7}$$

Demostración: Véase el problema 11.8.

Observación: La distribución de Weibull representa un modelo apropiado para una ley de falla siempre que el sistema esté compuesto por cierto número de componentes y la falla se deba principalmente al defecto "más grave" en un gran número de defectos del sistema. También, utilizando la distribución de Weibull, podemos obtener una tasa de fallas creciente y decreciente al hacer simplemente una elección apropiada del parámetro β.

En ningún caso hemos agotado el número de leyes de falla razonables. Sin embargo, las que hemos mencionado son, por cierto, sumamente importantes en la medida que representan modelos significativos para el estudio de las características de falla en componentes o en sistemas de componentes.

11.6 Confiabilidad de los sistemas

Ahora que hemos considerado un número importante de distribuciones de fallas podemos volver a la segunda pregunta propuesta en la sección 11.1: ¿cómo evaluar la confiabilidad de un sistema si conocemos la confiabilidad de sus componentes? Éste puede ser un problema muy difícil y sólo analizaremos un caso más sencillo (pero relativamente importante).

Supóngase que los dos componentes están acoplados en serie.

Esto significa que, para que el sistema anterior funcione, *ambos* componentes deben funcionar. Si, además, suponemos que los componentes funcionan *independientemente*, podemos obtener la confiabilidad del sistema, llamémoslo $R(t)$, en términos de la confiabilidad de los componentes, digamos $R_1(t)$ y $R_2(t)$, como sigue:

$$
\begin{aligned}
R(t) &= P(T > t) && \text{(donde } T \text{ es el tiempo para que ocurra la falla del sistema)} \\
&= P(T_1 > t \text{ y } T_2 > t) && \text{(donde } T_1 \text{ y } T_2 \text{ son los tiempos para que ocurra la falla de los componentes } C_1 \text{ y } C_2\text{, respectivamente)} \\
&= P(T_1 > t)P(T_2 > t) = R_1(t)R_2(t).
\end{aligned}
$$

Así, encontramos que $R(t) \leq \text{mín}[R_1(t), R_2(t)]$. Es decir, para un sistema formado por dos componentes independientes en serie, la confiabilidad del sistema es menor que la confiabilidad de cualquiera de sus partes.

La exposición anterior puede generalizarse, por supuesto, a n componentes y obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 11.5. Si n componentes, que funcionan independientemente, están conectados en serie, y si el i-ésimo componente tiene confiabilidad $R_i(t)$, entonces la confiabilidad del sistema completo, $R(t)$, está dada por

$$R(t) = R_1(t) \cdot R_2(t) \cdots R_n(t). \tag{11.8}$$

En particular, si T_1 y T_2 tienen leyes de falla exponenciales con parámetros α_1 y α_2, la ecuación (11.8) se transforma en

$$R(t) = e^{-\alpha_1 t} e^{-\alpha_2 t} = e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

Por lo tanto, la fdp del tiempo para que ocurran las fallas del sistema, llamémoslo T, es dado por

$$f(t) = -R'(t) = (\alpha_1 + \alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

Así establecemos el resultado siguiente.

Teorema 11.6. Si dos componentes que funcionan independientemente y tienen fallas exponenciales con parámetros α_1 y α_2 están conectados en *serie*, la ley de falla del sistema resultante es de nuevo exponencial con parámetro igual a $\alpha_1 + \alpha_2$.

(Este teorema obviamente se puede generalizar a n componentes en serie.)

EJEMPLO 11.5. (Tomado de I. Bazovsky, *Reliability, Theory and Practice*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1961.) Considérese un circuito electrónico que consta de 4 transistores de silicio, 10 diodos de silicio, 20 resistencias compuestas y 10 condensadores de cerámica en una operación continua en *serie*. Suponiendo que en ciertas condiciones de tensión (es decir, voltaje prefijado, corriente y temperatura), cada uno de esos artículos tiene la siguiente tasa *constante* de fallas.

diodos de silicio:	0.000002
transistores de silicio:	0.00001
resistencias compuestas:	0.000001
condensadores de cerámica:	0.000002

Debido a la tasa *constante* de fallas supuesta, la distribución exponencial representa la ley de falla para cada uno de los componentes anteriores. Debido a la conexión en serie, el tiempo para que ocurra la falla del circuito completo está de nuevo distribuido exponencialmente con parámetro (tasa de falla) igual a:

$$10(0.000002) + 4(0.00001) + 20(0.000001) + 10(0.000002) = 0.0001.$$

Por tanto, la confiabilidad del circuito está dada por $R(t) = e^{-0.0001t}$ Así, para un periodo de 10 horas de operación la probabilidad de que el circuito no falle está dada por $e^{-0.0001(10)} = 0.999$. El tiempo *esperado* para que el circuito falle es igual a $1/0.0001 = 10.000$ horas.

Otro sistema importante es un sistema en *paralelo* en el cual los componentes están conectados de tal manera que el sistema deja de funcionar sólo si todos los componentes dejan de funcionar. Si sólo dos componentes están implicados, el sistema puede dibujarse como en la figura 11.6. Suponiendo nuevamente que los componentes funcionan *independientemente* unos de otros, la confiabilidad del sistema, llamémosla $R(t)$, puede expresarse en términos de la confiabilidad de los componentes, $R_1(t)$ y $R_2(t)$, como sigue:

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) &= 1 - P(T \leq t) \\ &= 1 - P[T_1 \leq t \text{ y } T_2 \leq t] \\ &= 1 - P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \\ &= 1 - \{[1 - P(T_1 > t)][1 - P(T_2 > t)]\} \\ &= 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \\ &= R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t). \end{aligned}$$

La última forma indica que $R(T) \geq$ máximo $[R_1(t), R_2(t)]$. Es decir, un sistema integrado por dos componentes que funcionan independientemente en paralelo será más confiable que cualquiera de los componentes.

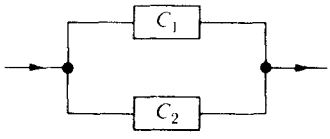


FIGURA 11.6

Todas las ideas antes presentadas para dos componentes pueden generalizarse en el teorema siguiente.

Teorema 11.7. Si n componentes que funcionan independientemente actúan en paralelo, y si el i-ésimo componente tiene confiabilidad $R_i(t)$, entonces la confiabilidad del sistema, digamos $R(t)$, está dada por

$$R(t) = 1 - [1 - R_1(t)][1 - R_2(t)] \cdots [1 - R_n(t)]. \tag{11.9}$$

A menudo sucede que todos los componentes tienen *igual* confiabilidad, digamos que $R_i(t) = r(t)$ para toda i. En este caso, la expresión anterior se transforma en

$$R(t) = 1 - [1 - r(t)]^n. \tag{11.10}$$

Consideremos, en particular, dos componentes en paralelo, cada uno de ellos con tiempo de falla distribuido exponencialmente. Luego,

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t) = e^{-\alpha_1 t} + e^{-\alpha_2 t} - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

Así, la fdp del tiempo de falla del sistema en paralelo, llamémoslo T, está dada por

$$f(t) = -R'(t) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} - (\alpha_1 + \alpha_2)e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

Por tanto, T *no* está distribuida exponencialmente. El valor esperado de T es igual a:

$$E(T) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Considerando que a menudo una serie de operaciones es obligatoria (es decir, un número de componentes *debe* funcionar para que el sistema funcione), con frecuencia usamos una operación en paralelo a fin de

aumentar la confiabilidad del sistema. El ejemplo siguiente ilustra este punto.

EJEMPLO 11.6. Supongamos que tres unidades están trabajando en paralelo y que cada una tiene la misma tasa constante de fallas $\alpha = 0.01$. (Es decir, el tiempo para que ocurra la falla de cada una de las unidades está distribuido exponencialmente con parámetro $\alpha = 0.01$. Por tanto, la confiabilidad para cada una de las unidades es $R(t) = e^{-0.01t}$, y así la confiabilidad en un periodo de operación de 10 horas es igual a $e^{-0.1} = 0.905$ o alrededor del 90%. ¿Cuánta mejoría puede obtenerse (en términos del aumento de la confiabilidad) al funcionar tres de tales unidades en paralelo?

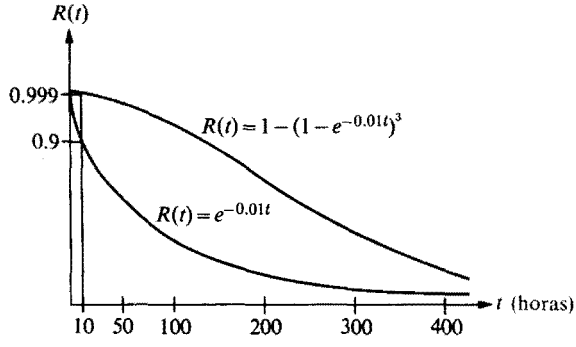


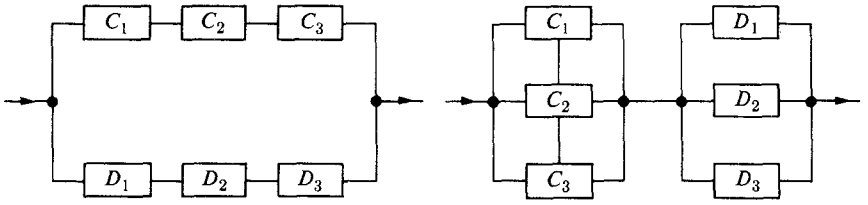
FIGURA 11.7

La confiabilidad de tres unidades que funcionan en paralelo durante 10 horas sería

$$R(10) = 1 - [1 - 0.905]^3 = 1 - 0.00086$$
$$= 0.99914 \quad \text{o alrededor del } 99.9\%$$

En la figura 11.7 vemos las curvas de confiabilidad de una sola unidad contra las tres unidades en paralelo. Para la unidad única, $R(t) = e^{-\alpha t}$, mientras que para las tres unidades en paralelo, $R(t) = 1 - (1 - e^{-\alpha t})^3$, con $\alpha = 0.01$.

Hemos considerado, hasta ahora, sólo las maneras más sencillas de combinar unidades individuales en un sistema, llamadas operaciones en serie y en paralelo de los componentes. Hay muchas otras formas de combinar componentes, pero sólo nombraremos unas cuantas. (Véase la Fig. 11.8.) Algunas de las preguntas que aparecen en relación con esas combinaciones se considerarán en los problemas al final del capítulo.



(a) Series en paralelo (b) Paralelas en serie

FIGURA 11.8

a) Series en paralelo. (Consideramos aquí grupos de componentes en paralelo como en un circuito, cada uno de los cuales tiene, por ejemplo, m componentes en serie.)

b) Paralelos en serie.

c) Sistema sostenido. Aquí consideramos dos componentes, de los cuales, el segundo se "mantiene" y funciona si y sólo si el primero falla. En este caso, instantáneamente se acepta el segundo componente y funciona en el lugar del primero.

Expongamos brevemente el concepto de *factor de seguridad*. Supóngase que la fuerza S que se aplica a una estructura se considera como una variable aleatoria (continua). En forma similar, la resistencia de la estructura, llamémosla R, se puede considerar también como una variable aleatoria continua. Definamos el factor de seguridad de la estructura como la razón de R a S.

$$T = R/S.$$

Si R y S son variables aleatorias independientes con fdp g y h, respectivamente, entonces la fdp de T está dada por

$$f(t) = \int_0^\infty g(ts)h(s)s \; ds\,.$$

(Véase el Teorema 6.5.) La estructura fallará si $S > R$, es decir, si $T < 1$. Por tanto, la probabilidad de fallar $P_F = \int_0^1 f(t) \; dt$.

PROBLEMAS

11.1. Supóngase que T, el tiempo para que ocurra la falla de un artículo, está distribuida normalmente con $E(T) = 90$ horas y desviación estándar de 5

horas. A fin de obtener una confiabilidad de 0.90, 0.95, 0.99, ¿Cuántas horas de operación se deben considerar?

11.2. Suponer que la duración de un instrumento electrónico está distribuido exponencialmente. Se sabe que la confiabilidad del instrumento (para un periodo de operación de 100 horas) es 0.90. ¿Cuántas horas de operación se deben considerar para obtener una confiabilidad de 0.95?

11.3. Suponiendo que la duración de un instrumento tiene una tasa constante de falla C_0 para $0 < t < t_0$ y una tasa constante distinta C_1 para $t \geq t_0$, determinar la fdp de T, el tiempo para que ocurra la falla, y dibujarla.

11.4. Supóngase que la tasa de fallas Z está dada por

$$Z(t) = 0, \qquad 0 < t < A,$$

$$= C, \qquad t \geq A.$$

(Esto implica que ninguna falla ocurre antes de $T = A$.)

a) Encontrar la fdp asociada con T, el tiempo para que ocurra la falla.
b) Calcular $E(T)$

11.5. Suponer que la ley de falla de una componente tiene la siguiente fdp:

$$f(t) = (r+1)A^{r+1}/(A+t)^{r+2}, \quad t > 0.$$

a) ¿Para qué valores de A y r es la anterior una fdp?
b) Obtener una expresión para la función de confiabilidad y la función de riesgo.
c) Demostrar que la función de riesgo es decreciente en t.

11.6. Supóngase que la ley de falla de un componente es una combinación lineal de k leyes exponenciales de falla. Es decir, la fdp del tiempo para que ocurra la falla está dada por

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} c_j \beta_j e^{-\beta_j t}, \quad t \geq 0, \quad \beta_j > 0.$$

a) ¿Para qué valores de c_j es la anterior fdp?
b) Obtener una expresión para la función de confiabilidad y la función de riesgo.
c) Obtener una expresión del promedio del tiempo para que ocurra la falla.
d) Responder *b*) y *c*) si $\beta_j = \beta$ para toda j.

11.7. Cada uno de los seis tubos de un equipo de radio tiene una duración (en años) que puede considerarse como una variable aleatoria. Supóngase que esos tubos funcionan independientemente uno de otro. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún tubo tenga que ser reemplazado durante los primeros dos meses de servicio si:

a) La fdp del tiempo para que ocurra la falla es $f(t) = 50te^{-25t^2}$, $t > 0$?
b) La fdp del tiempo para que ocurra la falla es $f(t) = 25te^{-25t}$, $t > 0$?

11.8. Demostrar el teorema 11.4.

11.9. La duración de un satélite es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con un tiempo de duración esperado de 1.5 años. Si tres satélites se lanzan en forma simultánea, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos dos estén aún en órbita después de 2 años?

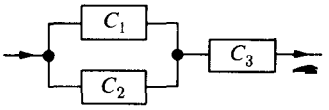


FIGURA 11.9

11.10. Tres componentes que funcionan independientemente están conectados en un sistema aislado como se indica en la figura 11.9. Suponiendo que la confiabilidad de cada componente para un periodo de t horas de operación está dada por

$$R(t) = e^{-0.03t}.$$

Si T es el tiempo para que ocurra la falla del sistema completo (en horas), ¿cuál es la fdp de T? ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?, ¿Cómo se compara con $e^{-.03t}$?

11.11. Supóngase que n componentes que funcionan independientemente son conectados en un arreglo en serie. Suponer que el tiempo para que ocurra la falla de cada uno de los componentes está distribuido normalmente con esperanza de 50 horas y desviación estándar de 5 horas.

a) Si $n = 4$, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione después de 52 horas de operación?
b) Si n componentes se conectan *en paralelo*, ¿cuál debería ser el valor de n a fin que la probabilidad de fallar durante las primeras 55 horas sea aproximadamente igual a 0.01?

11.12. Tomado de Derman y Klein, *Probability and Statistical Inference*. Oxford University Press, Nueva York, 1959.) La duración (L) en meses de cierto tubo al vacío usado en un equipo de radar está distribuida exponencialmente con parámetro $\beta = 2$. Al establecer su programa preventivo de mantenimiento,

una compañía desea saber cuántos meses (m) después de la instalación deberá reemplazarse el tubo para minimizar el costo esperado por tubo. El costo por tubo en dólares se denota con C. El tiempo útil más corto empleado entre la instalación y la sustitución es 0.01 mes. Obedeciendo a esta restricción, ¿qué valor de m minimizó $E(C)$, el costo esperado en cada una de las situaciones siguientes, donde el costo C es la función dada de L y m?

$a)$ $C(L,m) = |L-m|$.

$b)$ $C(L,m) = 3 \quad \text{si} \quad L < m,$
$\qquad = 5(L-m) \quad \text{si} \quad L \geq m.$

$c)$ $C(L,m) = 2 \quad \text{si} \quad L < m,$
$\qquad = 5(L-m) \quad \text{si} \quad L \geq m.$

(En cada uno de los casos dibuje una gráfica de $E(C)$ como función de m.)

Observación: Evidentemente C es una variable aleatoria, puesto que es una función de L la cual es una variable aleatoria. $E(C)$ es una función de m, y el problema sólo pide encontrar el valor de m que minimiza $E(C)$, sujeta a la restricción que $m \geq 0.01$.

11.13. Suponer que la tasa de fallas asociada con la duración T de un artículo está dada por la función siguiente:

$$Z(t) = C_0, \qquad 0 \leq t < t_0,$$
$$= C_0 + C_1(t - t_0), \qquad t \geq t_0.$$

Observación: Ésta representa otra generalización de la distribución exponencial. Lo anterior reduce a una tasa constante de fallas (y, por tanto a la distribución exponencial), si $C_1 = 0$.

$a)$ Obtener la fdp de T, el tiempo para que ocurra la falla.

$b)$ Obtener una expresión para la confiabilidad $R(t)$ y dibujar su gráfica.

11.14. Suponer que cada uno de tres instrumentos electrónicos tiene una ley de falla dada por una distribución exponencial con parámetros β_1, β_2 y β_3. Supóngase que los tres instrumentos funcionan independientemente y están conectados en paralelo para formar un solo sistema.

$a)$ Obtener una expresión para $R(t)$, la confiabilidad del sistema.

$b)$ Obtener una expresión para la fdp de T, el tiempo para que ocurra la falla del sistema. Dibujar la fdp.

$c)$ Encontrar el promedio de tiempo para que ocurra la falla del sistema.

11.15. $a)$ Supóngase que n componentes están conectados en un arreglo en serie. Luego k de tales conexiones en serie se conectan en paralelo para formar un sistema completo. (Véase la Fig. 11.10) Si cada uno de los componentes

tiene la misma confiabilidad, digamos R, para un periodo determinado de operación, encontrar una expresión para la confiabilidad del sistema completo (para ese mismo periodo de operaciones).

b) Supóngase que cada uno de los componentes anteriores sigue una ley exponencial de falla con tasa de falla 0.05. Supóngase, además, que el tiempo de operación es diez horas y que $n = 5$. Determinar el valor de k para que la confiabilidad del sistema completo sea igual a 0.99.

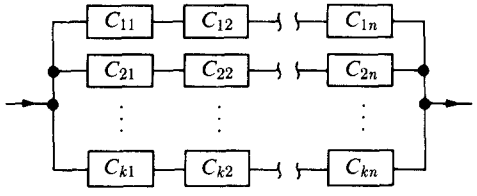


FIGURA 11.10

11.16. Supóngase que k componentes están conectados en paralelo. Entonces, n de tales conexiones en paralelo están unidas en serie en un solo sistema. (Véase la Fig. 11.11.) Responder *a*) y *b*) del problema 11.15 para esta situación.

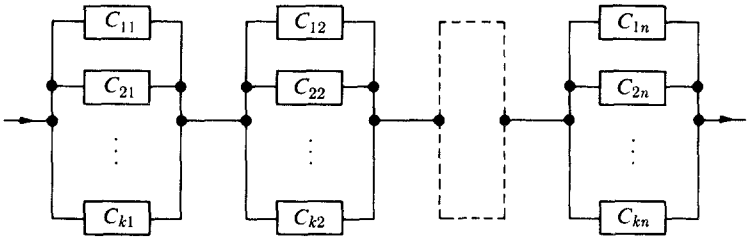


FIGURA 11.11

11.17. Supóngase que n componentes, cada uno de los cuales tiene la misma tasa constante de fallas λ, están conectados en paralelo. Encontrar una expresión para el tiempo promedio para que ocurra la falla del sistema resultante.

11.18. *a*) Un sistema de propulsión aéreo consta de tres motores. Supóngase que la tasa constante de fallas para cada uno de ellos es $\lambda = 0.0005$ y que los motores fallan independientemente uno de otro. Los motores están conectados en paralelo. ¿Cuál es la confiabilidad de este sistema de propulsión para una misión que necesita 10 horas, si por lo menos dos motores deben resistir?

b) Responder la pregunta anterior para una misión que necesita 100 horas y 1000 horas. (Este problema se tomó de una exposición en I. Bazovsky, *Reliability Theory and Practice*. Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1961.)

11.19. Considerar los componentes A, A', B, B' y C conectados como se indica en las figuras 11.12 *a*) y *b*). (Se puede pensar que el componente C representa un "seguro" si A y B dejaran de funcionar.) Representando con R_A, $R_{A'}$, R_B, $R_{B'}$, y R_C la confiabilidad de los componentes individuales (y suponiendo que los componentes funcionan independientemente uno de otro), obtener una expresión para la confiabilidad del sistema completo en cada uno de los casos. [Sugerencia: En el segundo caso (figura 11.12 (b)), emplear consideraciones de probabilidad condicional.]

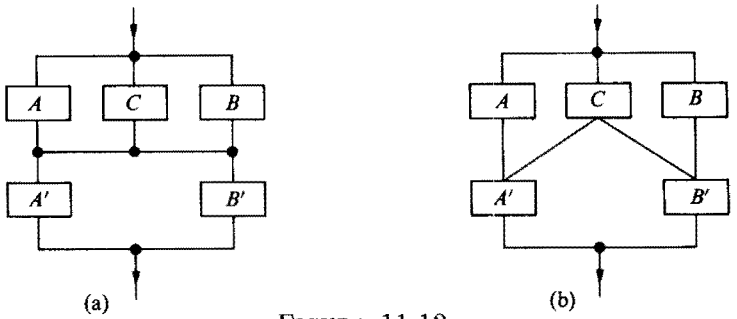


FIGURA 11.12

11.20. Si todos los componentes considerados en el problema 11.19 tienen la misma tasa constante de fallas λ, obtener una expresión para la confiabilidad $R(t)$ del sistema indicado en la figura 11.12 *b*). También encontrar el tiempo medio para que falle este sistema.

11.21. El componente A tiene una confiabilidad 0.9 cuando se utiliza con un propósito particular y el componente B, que puede usarse en lugar del componente A, tiene una confiabilidad de sólo 0.75. ¿Cuál es el número mínimo de componentes del tipo B que tendrían que conectarse en paralelo para obtener la confiabilidad que el componente A tiene por sí mismo?

11.22. Supóngase que dos componentes que funcionan independientemente cada uno con la misma tasa constante de falla, están conectados en paralelo. Si T es el tiempo para que ocurra la falla del sistema resultante, obtener la fgm de T. También determinar $E(T)$ y $V(T)$ usando la fgm.

11.23. Cada vez que hemos considerado un sistema formado por diversos componentes, hemos supuesto que los componentes funcionan independientemente uno de otro. Esta suposición ha simplificado considerablemente nuestros cálculos. Sin embargo, esto puede no ser siempre una suposición realista. En muchos casos se sabe que el comportamiento de un componente puede afectar el comportamiento de los otros. Esto es, en general, un problema muy difícil, y aquí sólo consideraremos un caso especial. Supongamos específicamente que dos componentes, C_1 y C_2, siempre fallan juntos. Es decir, C_1 falla

si y sólo si falla C_2. Demostrar que en este caso, $P(C_1$ falle y C_2 falle$) = P(C_1$ falle$) = P(C_2$ falle$)$.

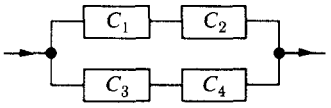


FIGURA 11.13

11.24. Considérese cuatro componentes, C_1, C_2, C_3 y C_4 conectados como se indicó en la figura 11.13. Suponer que los componentes funcionan independientemente uno de otro con excepción de C_1 y C_2, que siempre fallan juntos como se describió en el problema 11.23. Si T_i, el tiempo para que ocurra la falla del componente C_i, está distribuido exponencialmente con parámetro β_i, obtener la confiabilidad $R(t)$ del sistema completo. Obtener también la fdp de T, el tiempo para que ocurra la falla del sistema.

11.25. Considérese el mismo sistema tal como se describió en el problema 11.24. excepto que esta vez los componentes C_1 y C_3 fallan juntos. Responder las preguntas del problema 11.24.

12

Sumas de variables aleatorias

12.1 Introducción

En este capítulo queremos precisar algo que hemos indicado a lo largo del texto. Esto es, cuando el número de repeticiones de un experimento aumenta f_A, la frecuencia relativa de un evento A, converge (en un sentido probabilístico que describiremos) a la probabilidad teórica $P(A)$. Es este hecho lo que nos permite "identificar" la frecuencia relativa de un evento, basada en un gran número de repeticiones, con la probabilidad del evento.

Por ejemplo, si se produce un artículo nuevo y no tenemos conocimiento previo acerca de cuán probable es que el artículo sea defectuoso, podríamos proceder a inspeccionar un gran número de esos artículos, digamos N, contar el número de artículos defectuosos que hay entre ellos, sea n, y luego usar n/N como una aproximación para la probabilidad de que un artículo sea defectuoso. El número n/N es una variable aleatoria y su valor depende esencialmente de dos cosas. Primero, el valor de n/N depende de la probabilidad fundamental p (posiblemente desconocida) de que un artículo sea defectuoso. Segundo, n/N depende de los N artículos que en *particular* hemos inspeccionado. Lo que

demostraremos es que si el método de elegir los N artículos es "aleatorio", entonces el cociente n/N está cercano a p (en un sentido que se va a describir). Es evidente que la elección aleatoria de los N artículos es importante. Si eligiéramos por ejemplo sólo los artículos que presentan alguna característica física externa, podríamos prejuiciar gravemente nuestro cálculo.)

12.2 La ley de los grandes números

Con la ayuda de la desigualdad de Chebyshev (Ec. 7.20) podemos derivar el resultado antes citado. Consideremos otra vez un ejemplo. Supóngase que un cohete dirigido tiene una probabilidad de 0.95 de funcionar correctamente durante cierto periodo de operación. Así, si disparamos N cohetes que tienen la confiabilidad anterior, y si X es el número de cohetes que *no* funcionan en forma correcta, tenemos $E(X) = 0.05N$, puesto que podemos suponer que X está distribuida binomialmente. Es decir, esperaríamos que fallara alrededor de un cohete entre 20. Cuando aumenta N, el número de cohetes lanzados X, el número total de cohetes que fallan dividido entre N, debería converger de algún modo con el número 0.05. Este importante resultado puede indicarse con más precisión como la ley de los grandes números.

La ley de los grandes números (forma de Bernoulli). Sean ε un experimento y A un evento asociado con ε. Considerando n repeticiones independientes de ε, sea n_A el número de veces que ocurre A en las n repeticiones, y sea $f_A = n_A/n$. Sea $P(A) = p$ (que se supone es igual para todas las repeticiones).
Entonces, para cualquier número positivo ϵ, tenemos

$$\text{Prob } [|f_A - p| \geq \epsilon] \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

o, en forma equivalente,

$$\text{Prob } [|f_A - p| < \epsilon] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}. \tag{12.1}$$

Demostración: Sea n_A el número de veces que ocurre el evento A. Ésta es una variable aleatoria distribuida binomialmente. Entonces $E(n_A) = np$ y $V(n_A) = np(1-p)$. Ahora $f_A = n_A/n$, y, por lo tanto $E(f_A) = p$ y $V(f_A) = p(1-p)/n$.

Aplicando la desigualdad de Chebyshev a la variable aleatoria f_A, obtenemos

$$P\left[|f_A - p| < k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Sea $\epsilon = k\sqrt{p(1-p)/n}$. Luego $k^2 = (n\epsilon^2)/[p(1-p)]$, y así

$$P[|f_A - p| < \epsilon] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

Observaciones: a) El resultado anterior puede establecerse de diferentes maneras alternativas equivalentes. Está claro que lo anterior implica inmediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} P[|f_A - p| < \epsilon] = 1 \quad \text{para toda } \epsilon > 0.$$

En este sentido, decimos que la frecuencia relativa "converge" a $P(A)$.

b) Es importante observar la diferencia entre la convergencia antes mencionada (llamada *convergencia en probabilidad*) y el tipo de convergencia citada a menudo en cálculo. Cuando decimos que 2^{-n} converge a cero cuando $n \to \infty$ significa que para una n suficientemente grande, 2^{-n} se transforma y permanece arbitrariamente cercana a cero. Cuando decimos que $f_A = n_A/n$ converge a $P(A)$ indicamos que la *probabilidad* del evento

$$\{|n_A/n - P(A)| < \epsilon\}$$

puede hacerse arbitrariamente cercana a uno tomando una n suficientemente grande.

c) Otra forma de la ley de los grandes números se obtiene cuando formulamos la siguiente pregunta. ¿Cuántas repeticiones de ε deberían hacerse para tener una probabilidad, digamos de 0.95, de que la frecuencia relativa difiera de $p = P(A)$ en menos de 0.01?
Es decir, para $\varepsilon = 0.01$ deseamos escoger n, de modo que $1-p(1-p)/[n(0.01)^2] = 0.95$. Resolviendo para n obtenemos $n = p(1-p)/(0.01)^2(0.05)$. Sustituyendo los valores específicos de 0.05 y 0.01 por δ y ϵ, respectivamente, tenemos

$$P[|f_A - p| < \epsilon] \geq 1 - \delta \quad \text{cuando} \quad n \geq \frac{p(1-p)}{\epsilon^2\delta}.$$

Nuevamente debería insistirse en que tomar $n \geq p(1-p)/\epsilon^2\delta$ no *garantiza* nada acerca de $|f_A - p|$. Sólo hace probable que $|f_A - p|$ sea muy pequeña.

EJEMPLO 12.1. ¿Cuántas veces habría que lanzar un dado regular a fin de tener al menos 95% de seguridad de que la frecuencia relativa de que salga un seis diste 0.01 de la probabilidad teórica $\frac{1}{6}$?

Aquí $p = \frac{1}{6}$, $1 - p = \frac{5}{6}$, $\epsilon = 0.01$ y $\delta = 0.05$. Por lo tanto, de esta relación encontramos que $n \geq \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)/(0.01)^2(0.05) = 27.778$.

Observaciones: a) Recordemos que la f_A es una variable aleatoria y no precisamente un valor observado. Si lanzáramos ahora 27.778 veces un dado y luego calculamos la frecuencia relativa que salga un seis, este número dista o no 0.01 de. Lo importante del ejemplo anterior es que si lanzáramos 27.778 veces un dado en cada una de 100 habitaciones, aproximadamente en 95 de ellas la frecuencia relativa observada estaría dentro de 0.01 de $\frac{1}{6}$.

b) En muchos problemas no conocemos el valor de $p = P(A)$ y, por lo tanto, no podemos usar el límite anterior de n. En ese caso podemos usar el hecho de que $p(1 - p)$ toma su valor máximo cuando $p = \frac{1}{2}$ y este valor máximo es igual a $\frac{1}{4}$. Así, ciertamente estaríamos seguros si indicamos que para $n \geq 1/4\epsilon^2\delta$ tenemos

$$P[|f_A - p| < \epsilon] \geq 1 - \delta.$$

EJEMPLO 12.2. Algunos artículos se producen de tal manera que la probabilidad de que un artículo sea defectuoso es p (supuestamente desconocido). Un gran número de artículos, digamos n, se clasifica como defectuosos o no defectuosos. ¿Cuál debe ser el tamaño de n de modo que podamos estar un 99% seguros de que la frecuencia relativa de los defectuosos se diferencia de p en menos de 0.05?

Puesto que no sabemos el valor p, debemos aplicar la última forma establecida de la ley de los grandes números. Luego, con $\epsilon = 0.05$, $\delta = 0.01$ encontramos que si $n \geq 1/4(0.05)^2(0.01) = 10\,000$, se satisface la condición pedida.

Como en nuestro ejemplo de la desigualdad de Chebyshev, encontraremos que el conocimiento adicional acerca de la distribución de probabilidades dará una proposición "mejorada". (Por ejemplo, podríamos tener un número pequeño de repeticiones y todavía hacer la misma proposición referente a la proximidad de f_A a p.)

Observación: Otra forma de la ley de los grandes números se puede obtener como sigue. Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con promedio y varianza finita. Sea $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$. Definamos $\overline{X} = (1/n)(X_1 + \cdots + X_n)$. Ahora, $\overline{X}$ es una función de $X_1, \ldots, X_n$ a saber, su promedio aritmético y, por tanto, nuevamente

es una variable aleatoria. (Estudiaremos esta variable aleatoria con más detalle en el capítulo 13. Por el momento, digamos simplemente que podemos pensar en $X_1, \ldots, X_n$ como medidas independientes de una característica numérica X, que producen el promedio aritmético $\overline{X}$.) De las propiedades de la esperanza y de la varianza inmediatamente tenemos, $E(\overline{X}) = \mu$ y $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$. Aplicando la desigualdad de Chebyshev a la variable aleatoria $\overline{X}$:

$$P\left[|\overline{X} - \mu| < \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Sea $k\sigma/\sqrt{n} = \epsilon$. Entonces $k = \sqrt{n}\epsilon/\sigma$ y podemos escribir

$$P\left[|\overline{X} - \mu| < \epsilon\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 n}. \tag{12.2}$$

Cuando $n \to \infty$, el lado derecho de la desigualdad anterior está cercana a uno. Es en este sentido en que el promedio aritmético "converge" $E(X)$.

EJEMPLO 12.3. Se prueba un gran número de tubos electrónicos. Sea T_i el tiempo para que ocurra la falla del i-ésimo tubo. Supóngase, además, que todos los tubos provienen del mismo lote y que puede estimarse que todos están distribuidos exponencialmente con el mismo parámetro α.

Por lo tanto, $E(T_i) = \alpha^{-1}$. Sea $\overline{T} = (T_1 + \cdots + T_n)/n$. La forma anterior de la ley de los grandes números establece que si n es muy grande, sería "muy probable" que el valor obtenido para el promedio aritmético de un gran número de tiempos de fallas estuviera cercano a α^{-1}.

12.3 Aproximación normal a la distribución binomial

Como se estableció antes, la ley de los grandes números se relaciona esencialmente con la variable aleatoria X distribuida binomialmente. X se definió como el número de éxitos en n repeticiones independientes de un experimento, y necesitamos asociar simplemente "éxito" con la ocurrencia del evento A para reconocer esta relación. Así, el resultado anterior puede establecerse informalmente afirmando que cuando el número de repeticiones de un experimento se aumenta, la frecuencia relativa de éxito, X/n, converge a la probabilidad de éxito p, en el sentido indicado previamente.

Sin embargo, saber que X/n está "cercana" a p para una n grande no nos indica cómo se obtiene esta "cercanía". Para investigar esto debemos estudiar la distribución de probabilidades de X cuando n es grande.

Por ejemplo, supóngase que un proceso de fabricación produce lavadoras, de las cuales alrededor del 5% son defectuosas (es decir, muchas). Si se inspeccionan 100 lavadoras, ¿cuál es la probabilidad de que sean defectuosas menos de 4?

Siendo X el número de lavadoras defectuosas encontradas, la ley de los grandes números nos dice simplemente que $X/100$ debería estar "cercano" a 0.05. Sin embargo, no nos indica cómo calcular la probabilidad deseada. El valor *exacto* de esta probabilidad está dado por

$$P(X < 4) = \sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} (0.05)^k (0.95)^{100-k}.$$

Sería más difícil calcular esta probabilidad en forma directa. Ya hemos estudiado un método de aproximación para las probabilidades binomiales, como la aproximación de Poisson. Consideraremos ahora otra aproximación importante para tales probabilidades, la cual se aplica cada vez que n es suficientemente grande.

Considérese que $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Esta probabilidad depende de n de un modo más complicado y no hay una indicación evidente de lo que sucede a la expresión anterior si n es grande. A fin de investigar esta probabilidad, necesitamos usar la *fórmula de Stirling*, una aproximación muy conocida de $n!$ Esta fórmula establece que para una n grande,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}, \tag{12.3}$$

en el supuesto de que $\lim_{n\to\infty}(n!)/\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}) = 1$. (Una demostración de esta aproximación puede encontrarse en muchos textos de cálculo avanzado.) La tabla 12.1 puede dar una idea al lector de la exactitud de esta aproximación. Esta tabla está tomada de W. Feller, *Probability Theory and Its Applications*. 1a. ed., Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1950.

Observación: Aunque la diferencia entre $n!$ y su aproximación se hace mayor cuando $n \to \infty$, lo importante de observar en la tabla 12.1 es que el porcentaje de error (última columna) se hace cada vez más pequeño.

TABLA 12.1

n	$n!$	$\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+(1/2)}$	Diferencia	$\frac{\text{Diferencia}}{n!}$
1	1	0.922	0.078	0.08
2	2	1.919	0.081	0.04
5	120	118.019	1.981	0.02
10	$(3.6288)10^6$	$(3.5986)10^6$	$(0.0302)10^6$	0.008
100	$(9.3326)10^{157}$	$(9.3249)10^{157}$	$(0.0077)10^{157}$	0.0008

Usando la fórmula de Stirling para los diversos factoriales que aparecen en la expresión de $P(X = k)$, puede demostrarse (después de muchas operaciones), que para una n grande,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]^2\right) \qquad (12.4)$$

Finalmente puede demostrarse que para n grande,

$$P(X \leq k) = P\left[\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(k-np)/\sqrt{np(1-p)}} e^{-t^2/2}\, dt\,. \qquad (12.5)$$

Así tenemos el siguiente resultado importante (conocido como la aproximación de DeMoivre–Laplace para la distribución binomial):

Aproximación normal a la distribución binomial. Si X tiene una distribución binomial con parámetros n y p y si

$$Y = \frac{X-np}{[np(1-p)]^{1/2}}.$$

luego, para una n grande, Y tiene aproximadamente una distribución $N(0,1)$ en el sentido de que $\lim_{n\to\infty} P(Y \leq y) = \Phi(y)$. Esta aproximación es válida para valores de $n > 10$ suponiendo

que p está cercana a $\frac{1}{2}$. Si p está cercana a 0 o 1, n debería ser algo mayor para asegurar una buena aproximación.

Observaciones: a) El resultado anterior no es sólo de considerable interés teórico sino también de gran importancia práctica. Indica que podemos usar la distribución normal, muy tabulada, para calcular probabilidades que provienen de la distribución binomial.

b) En la tabla 12.2 la exactitud de la aproximación (12.4) se demuestra para diversos valores de n, k y p.

TABLA 12.2

	$n = 8, p = 0.2$		$n = 8, p = 0.5$		$n = 25, p = 0.2$	
k	Aproximación	Exacto	Aproximación	Exacto	Aproximación	Exacto
0	0.130	0.168	0.005	0.004	0.009	0.004
1	0.306	0.336	0.030	0.031	0.027	0.024
2	0.331	0.294	0.104	0.109	0.065	0.071
3	0.164	0.147	0.220	0.219	0.121	0.136
4	0.037	0.046	0.282	0.273	0.176	0.187
5	0.004	0.009	0.220	0.219	0.199	0.196
6	0+	0.001	0.104	0.109	0.176	0.163
7	0+	0+	0.030	0.031	0.121	0.111
8	0+	0+	0.005	0.004	0.065	0.062
9	0+	0+	0+	0+	0.027	0.029
10	0+	0+	0+	0+	0.009	0.012
11	0+	0+	0+	0+	0.002	0.004

Volviendo al ejemplo anterior, observamos que

$$E(X) = np = 100(0.05) = 5,$$

$$V(X) = np(1-p) = 4.75.$$

Entonces podemos escribir

$$P(X \leq 3) = P\left(\frac{0-5}{\sqrt{4.75}} \leq \frac{X-5}{\sqrt{4.75}} \leq \frac{3-5}{\sqrt{4.75}}\right)$$

$$= \Phi(-0.92) - \Phi(-2.3) = 0.168,$$

de las tablas de la distribución normal.

Observación: Al usar la aproximación normal a la distribución binomial, estamos aproximando la distribución de una variable aleatoria discreta con la distribución de una variable aleatoria continua. Por tanto, se debe tener cierto cuidado con los puntos extremos del intervalo considerado. Por ejemplo, para una variable aleatoria continua, $P(X = 3) = 0$, mientras que para una variable aleatoria discreta esta probabilidad puede ser positiva.

Se ha encontrado que las siguientes *correcciones para continuidad* mejoran la aproximación anterior:

a) $P(X = k) \simeq P(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2})$,
b) $P(a \leq X \leq b) \simeq P(a - \frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2} + b)$.

Usando esta última corrección para la evaluación anterior de $P(X \leq 3)$, tenemos

$$P(X \leq 3) = P(0 \leq X \leq 3) = P\left(-\tfrac{1}{2} \leq X \leq 3\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\simeq \Phi(-0.69) - \Phi(-2.53) = 0.239.$$

EJEMPLO 12.4. Supóngase que un sistema está formado por 100 componentes, cada uno de los cuales tiene una confiabilidad igual a 0.95. (Es decir, la probabilidad de que el componente funcione correctamente durante un tiempo específico es igual a 0.95.) Si estos componentes funcionan independientemente uno de otro, y si el sistema completo también funciona en forma correcta cuando funcionan al menos 80 componentes, ¿cuál es la confiabilidad del sistema?

Sea X el número de componentes que funcionan, debemos evaluar

$$P(80 \leq X \leq 100).$$

Tenemos

$$E(X) = 100(0.95) = 95; \quad V(X) = 100(0.95)(0.05) = 4.75.$$

Por lo tanto, usando la corrección para continuidad, obtenemos

$$P(80 \leq X \leq 100) \simeq P(79.5 \leq X \leq 100.5)$$
$$= p\left(\frac{79.5 - 95}{2.18} \leq \frac{X - 95}{2.18} \leq \frac{100.5 - 95}{2.18}\right)$$
$$\simeq \Phi(2.52) - \Phi(-7.1) = 0.994.$$

12.4 El teorema del límite central

La aproximación anterior representa sólo un caso especial de un resultado general. A fin de verificar esto, recordemos que la variable aleatoria X distribuida binomialmente se puede representar como la *suma* de las siguientes variables aleatorias independientes:

$X_i = 1$ si el éxito ocurre en la i-ésima repetición;
$= 0$ si la falla ocurre en la i–ésima repetición.

Por lo tanto, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (Véase el Ej. 7.13.) Para *esta* variable aleatoria hemos demostrado que $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ y, además, que para una n grande, $(X - np)/\sqrt{np(1-p)}$ tiene la distribución aproximada $N(0,1)$.

Si una variable aleatoria X se puede representar como una *suma de n variables aleatorias independientes cualesquiera* (satisfaciendo ciertas condiciones que son válidas en la mayor parte de las aplicaciones), entonces esta suma, para una n suficientemente grande, está distribuida en forma aproximadamente normal. Este resultado notable se conoce como el teorema del límite central. Una forma de este teorema se puede establecer como sigue.

Teorema del límite central. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu_i$ y $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1, 2, \ldots$ Sea $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; entonces, en ciertas condiciones generales (que no se indicarán explícitamente aquí),

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$. Es decir, si G_n es la fda de la variable aleatoria Z_n, tenemos $\lim_{n\to\infty} G_n(z) = \Phi(z)$.

Observaciones: a) Este teorema representa una generalización obvia de la aproximación de DeMoivre–Laplace. Las variables aleatorias independientes X_i que toman sólo los valores 1 y 0 han sido sustituidas por variables aleatorias que poseen cualquier clase de distribución (mientras tengan esperanza y varianza finitas). El hecho de que las X_i pueden tener (esencialmente) cualquier clase de distribución y aún así la suma $X = X_1 + \cdots + X_n$ puede ser aproximada por una variable aleatoria distribuida normalmente, representa la razón básica de la importancia de la distribución normal en la teoría de probabilidad. En muchos problemas, la variable aleatoria que se considera se puede representar con la suma de n variables aleatorias independientes y, por tanto, su distribución puede aproximarse con la distribución normal.

Por ejemplo, el consumo de electricidad en una ciudad en cualquier hora dada es la suma de la demanda de un gran número de consumidores individuales. La cantidad de agua de un embalse puede considerarse como la representación de la suma de un gran número de contribuciones individuales. Y el

error de medida en un experimento físico está compuesto de muchos errores pequeños no observables que pueden considerarse aditivos. El bombardeo molecular que padece una partícula suspendida en un líquido es la causa que la obliga a desplazarse en una dirección y una magnitud aleatorias, y su posición (después de un tiempo especificado) puede considerarse como una suma de desplazamientos individuales.

b) Las condiciones generales citadas en la formulación anterior del teorema del límite central pueden resumirse informalmente como sigue: los términos individuales en la suma contribuyen con una cantidad despreciable a la variación de la suma y es muy improbable que cualquier tamaño individual haga una gran contribución a la suma. (Parece que los errores de medida tienen esta característica. El error final puede ser representado como una suma de varias pequeñas contribuciones, ninguna de las cuales contribuye mucho al error completo.)

c) Hemos establecido ya (Teorema 10.5) que la suma de cualquier número finito de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente es de nuevo distribuida normalmente. El teorema del límite central establece que los sumandos no necesitan ser distribuidos normalmente para aproximarse a la suma con una distribución normal.

d) No podemos demostrar aquí el teorema anterior, sin exceder el nivel de presentación programado. Sin embargo, hay un caso especialmente importante de este teorema que estableceremos y para el cual damos al menos un bosquejo de demostración.

Teorema 12.1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias independientes que tienen la *misma* distribución. Sean $\mu = E(X_i)$ y $\sigma^2 = V(X_i)$, la esperanza y la varianza común. Sea $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces, $E(S) = n\mu$ y $V(S) = n\sigma^2$, y para una gran n tenemos que $T_n = (S - n\mu)/\sqrt{n}\sigma$ tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$ considerando que $\lim_{n\to\infty} P(T_n \leq t) = \Phi(t)$.

Demostración: (bosquejo): (Es conveniente que el lector revise los conceptos básicos de la fgm presentados en el capítulo 10.) Sea M la fgm (común) de las X_i. Puesto que las X_i son independientes, M_S, la fgm de S, está dada por $M_S(t) = [M(t)]^n$, y como T_n es una función lineal de S (usando el Teorema 10.2), la fgm de T_n está dada por

$$M_{T_n}(t) = e^{-(\sqrt{n}\mu/\sigma)t}\left[M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n.$$

Así,

$$\ln M_{T_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\mu}{\sigma}t + n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right).$$

(En este punto observemos que la idea de la demostración consiste en investigar $M_{T_n}(t)$ para valores grandes de n).

Desarrollemos $M(t)$ en una serie de Maclaurin:

$$M(t) = 1 + M'(0)t + \frac{M''(0)t^2}{2} + R,$$

donde R es el término del resto. Recordando que $M'(0) = \mu$ y $M''(0) = \mu^2 + \sigma^2$, obtenemos

$$M(t) = 1 + \mu t + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2} + R.$$

Por lo tanto,

$$\ln M_{T_n}(t) = -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n \ln\left[1 + \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R\right].$$

Usaremos ahora el desarrollo de Maclaurin para $\ln(1 + x)$:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

(Este desarrollo es válido para $|x| < 1$. En nuestro caso,

$$x = \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)t^2}{2n\sigma^2} + R;$$

y para n suficientemente grande, el valor absoluto de este desarrollo será menor que uno.) Así obtenemos

$$\ln M_{T_n}(t) = -\frac{\sqrt{n}\mu t}{\sigma} + n\left[\left(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + R\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + R\right)^2 + \cdots\right].$$

Puesto que sólo estamos bosquejando los pasos principales de la demostración sin dar todos los detalles, omitamos algunas operaciones algebraicas e indiquemos simplemente lo que estamos haciendo. Queremos investigar la expresión anterior ($\ln M_{T_n}(t)$) cuando $n \to \infty$. Cualquier término que tiene una potencia positiva de n en el denominador (tal como $n^{-1/2}$, por ejemplo) tenderá a cero cuando $n \to \infty$. También se puede demostrar que todos los términos en que interviene R tienden a cero cuando $n \to \infty$. Después de un proceso algebraico muy directo, pero tedioso, encontramos que

$$\lim_{n\to\infty} \ln M_{T_n}(t) = t^2/2.$$

Entonces, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} M_{T_n}(t) = e^{t^2/2}.$$

Ésta es la fgm de una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Debido a la propiedad de unicidad de la fgm (véase el Teorema 10.3) podemos concluir que la variable aleatoria T_n converge en distribución (cuando $n \to \infty$) a la distribución $N(0,1)$.

Observaciones: a) Aunque la anterior no es una demostración rigurosa, aun así proporciona al lector cierta idea para deducir este notable teorema. La forma más general del teorema del límite central (como se estableció originalmente) se puede demostrar usando un planteamiento semejante al utilizado aquí.

b) La forma especial del teorema del límite central, como se estableció antes, expresa que el promedio aritmético $(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ de n observaciones de la misma variable aleatoria tiene aproximadamente una distribución normal para una n grande.

c) Aunque una demostración matemática establecería la validez de un teorema, puede que no contribuya mucho a la idea intuitiva del resultado. Por lo tanto, presentamos el ejemplo siguiente para quienes poseen mayor orientación numérica.

EJEMPLO 12.5. Considérese una urna que contiene tres clases de objetos identificados como 0, 1 y 2. Supongamos que hay 20 ceros, 30 unos y 50 doses. Se saca un artículo al azar y se anota su valor, digamos X. Supóngase que X tiene la distribución siguiente. (Véase la Fig. 12.1.)

X	0	1	2
$P(X = x)$	0.2	0.3	0.5

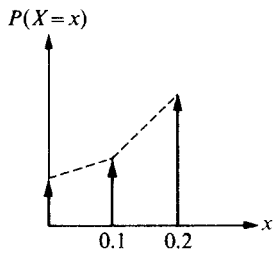


FIGURA 12.1

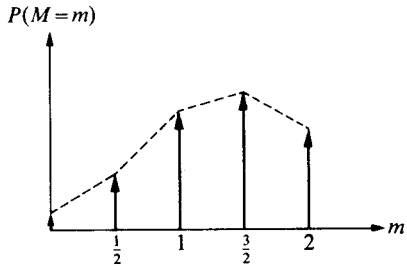


FIGURA 12.2

Supóngase que el artículo elegido primero se sustituye, luego se escoge un segundo artículo y se anota su valor, digamos Y. Considérese la variable aleatoria $M = (X + Y)/2$ y su distribución (Fig. 12.2).

M	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$P(M = m)$	0.04	0.12	0.29	0.30	0.25

Obtuvimos los valores anteriores de $P(M)$ como sigue:

$$\begin{aligned} P(M = 0) &= P(X = 0, Y = 0) = (0.2)^2 = 0.04; \\ P(M = \tfrac{1}{2}) &= P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) \\ &= (0.2)(0.3) + (0.3)(0.2) = 0.12, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Finalmente supongamos que después de que el segundo artículo también se ha reemplazado, se escoge un tercer artículo y se anota su valor, digamos Z. Considerar la variable aleatoria $N = (X + Y + Z)/3$ y su distribución (Fig. 12.3):

N	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$P(N = n)$	0.008	0.036	0.114	0.207	0.285	0.225	0.125

Las distribuciones de probabilidades de las variables aleatorias M y N ya muestran signos de "normalidad". Es decir, la aparición de la forma de campana de la curva de distribución empieza a hacerse evidente. Iniciando con la distribución de X, que es muy simétrica, encontramos

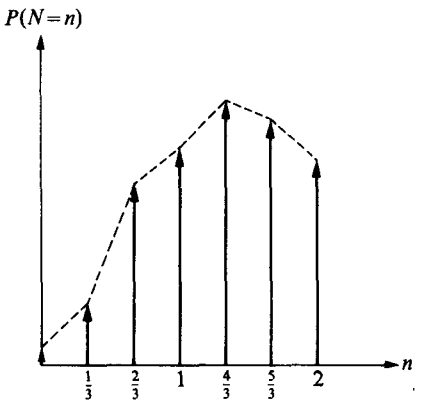


FIGURA 12.3

que el promedio de sólo tres observaciones tiene una distribución que ya muestra "signos de normalidad".

Por supuesto, el ejemplo anterior no *demuestra* nada. Sin embargo, representa una ilustración numérica de los resultados expuestos previamente de una manera más matemática. El lector deberá continuar este ejemplo agregando una observación más y luego encontrar la distribución de probabilidades del promedio de las cuatro observaciones obtenidas. (Véase el Prob. 12.10.)

EJEMPLO 12.6. Supóngase que tenemos cierto número de voltajes con ruido independientes, V_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, que se reciben en lo que se llama un "sumador". (Véase la Fig. 12.4.) Sea V la suma de los voltajes recibidos, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Supóngase que cada una de las variables aleatorias V_i está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 10]$. Por lo tanto, $E(V_i) = 5$ volts y var $(V_i) = 100/12$.

De acuerdo con el teorema del límite central, si n es suficientemente grande, la variable aleatoria

$$S = (V - 5n)\sqrt{12}/10\sqrt{n}$$

tiene aproximadamente la distribución N(0,1). Luego, si $n = 20$ podemos calcular la probabilidad de que el voltaje total de entrada sobrepase 105 volts, como sigue:

$$P(V > 105) = P\left(\frac{V - 100}{(10/\sqrt{12})\sqrt{20}} > \frac{105 - 100}{(10/\sqrt{12}\sqrt{20}}\right)$$

$$\simeq 1 - \Phi(0.388) = 0.352.$$

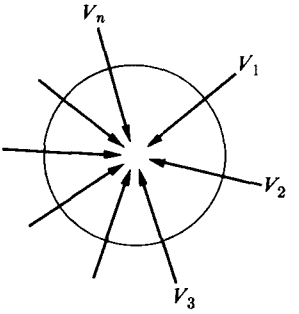


FIGURA 12.4

12.5 Otras distribuciones aproximadas por la distribución normal: de Poisson, de Pascal y gama

Hay cierto número de distribuciones importantes distintas a la binomial expuesta en la sección 12.3 que se pueden aproximar por la distribución normal. Y en cada caso, como lo haremos notar, la variable aleatoria cuya distribución aproximaremos puede representarse con una suma de variables aleatorias independientes, dando así una aplicación del teorema del límite central como se expuso en la sección 12.4.

a) *La distribución de Poisson.* Recordemos que una variable aleatoria de Poisson aparece (sujeta a ciertas condiciones) cuando estamos interesados en el número total de ocurrencias de un evento en un intervalo de tiempo de longitud t, con una intensidad (es decir, tasa de ocurrencias por unidad de tiempo) de α (véase la Sec. 8.2). Tal como se expuso en esa sección, podemos considerar el número total de ocurrencias como la *suma* de las ocurrencias en intervalos muy pequeños, no sobrepuestos, haciendo así aplicables los resultados de la sección anterior.

EJEMPLO 12.7. Supóngase que las llamadas a una central telefónica particular ocurren a razón de dos por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban 22 o menos llamadas en un periodo de 15 minutos? (Suponemos, por supuesto, que la intensidad permanece igual durante el periodo considerado.) Si X = número de llamadas recibidas, entonces $E(X) = 2(15) = 30$. Para calcular $P(X \leq 22)$, aplicando la corrección para la continuidad (véase la Ec. *b*) que precede al Ej. 12.4), tenemos

$$P(X \leq 22) \cong P\left(Y \leq \frac{22 + \frac{1}{2} - 30}{\sqrt{30}}\right)$$

donde Y tiene distribución $N(0, 1)$. Por lo tanto, la probabilidad anterior es igual a $\Phi(-1.37) = 0.0853$.

b) *La distribución de Pascal.* Si Y = número de ensayos de Bernoulli necesarios para tener r éxitos, entonces Y tiene una distribución de Pascal y se puede representar con la suma de r variables aleatorias independientes (véase la Sec. 8.5). Luego, para una r suficientemente grande, se aplican los resultados de la sección anterior.

EJEMPLO 12.8. Encuéntrese un valor aproximado de la probabilidad de que se necesiten 150 o menos ensayos para obtener 48 éxitos cuando $P(\text{éxito}) = 0.25$. Haciendo X = número de ensayos, tenemos (véase la Ec. 8.8) $E(X) = r/p = 48/0.25 = 192$, y Var $X = rq/p^2 = (48)(0.75)/(0.25)^2 = 576$. Por tanto,

$$P(X \leq 150) \cong \Phi\left(\frac{150 + \frac{1}{2} - 192}{\sqrt{576}}\right) = \Phi(-1.73) = 0.0418.$$

c) La distribución gama. Como se indicó en el teorema 10.9, una variable aleatoria que tiene una distribución gama (con parámetros α y r) se puede representar con una suma de r variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente. Luego, para una r grande, se aplica nuevamente el teorema del límite central.

12.6 La distribución de la suma de un número finito de variables aleatorias

El ejemplo 12.6 sirve para motivar la exposición siguiente. Sabemos que la suma de cualquier número finito de variables aleatorias independientes distribuidas normalmente también está distribuida normalmente. Del teorema del límite central podemos concluir que para n grande, la suma de n variables aleatorias independientes tiene una distribución aproximadamente normal. Queda por resolver la pregunta siguiente: supóngase que consideramos $X_1 + \cdots + X_n$, donde las X son variables aleatorias independientes (no necesariamente normales) y n no es suficientemente grande para justificar el uso del teorema del límite central. ¿Cuál es la distribución de esta suma? Por ejemplo, ¿cuál es la distribución del voltaje de entrada V (Ej. 12.6), si $n = 2$ o $n = 3$?

Primero consideraremos el importante caso de la suma de dos variables aleatorias. Se puede establecer el resultado siguiente.

Teorema 12.2. Supóngase que X y Y son variables aleatorias continuas independientes con fdp g y h, respectivamente. Sea $Z = X + Y$ y denótese la fdp de Z por s. Entonces,

$$s(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)h(z - w)\, dw. \tag{12.6}$$

Demostración: Puesto que X y Y son independientes, su fdp conjunta f puede factorizarse:

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

Usando la transformación:

$$z = x + y, \quad w = x.$$

Luego, $x = w$, $y = z - w$. El jacobiano de esta transformación es

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Así, el valor absoluto de J es 1 y, por tanto, la fdp conjunta de $Z = X + Y$ y $W = X$ es

$$k(z, w) = g(w)h(z - w).$$

La fdp de Z se obtiene ahora al integrar $k(z, w)$ de $-\infty$ a ∞ respecto a w, de donde se obtiene el resultado anterior.

Observaciones: a) La integral anterior que relaciona las funciones g y h ocurre en muchos temas matemáticos diferentes. A menudo se le menciona como la integral de *convolución* de g y h; algunas veces se escribe como $g * h$.

b) La evaluación de la integral anterior debe hacerse con mucho cuidado. En realidad, la misma dificultad que apareció en la evaluación de la fdp de un producto o de un cociente aparece nuevamente. Las funciones g y h a menudo serán distintas de cero sólo para ciertos valores de sus argumentos. Por tanto, el integrando en la integral anterior será distinto de cero sólo para aquellos valores de la variable de integración w para los cuales *ambos* factores del integrando son distintos de cero.

c) La fórmula anterior, ecuación (12.6), puede usarse repetidamente (con dificultad creciente, sin embargo) para obtener la fdp de la suma de cualquier número finito de variables aleatorias continuas independientes. Por ejemplo, si $S = X + Y + W$, podemos escribir como $S = Z + W$, donde $Z = X + Y$. Luego podemos usar el planteamiento anterior para obtener la fdp de Z, y entonces, conociendo la fdp de Z, usar este método otra vez para obtener la fdp de S.

d) Podemos derivar la ecuación (12.6) de otra manera, sin usar la noción de jacobiano. Denotemos por S la fda de la variable aleatoria $Z = X + Y$. Luego

$$S(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_R g(x)h(y)\, dx\, dy,$$

donde

$$R = \{(x, y) \mid |x + y| \leq z\}.$$

(Véase la Fig. 12.5.) Por lo tanto,

$$S(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{z-x} g(x)h(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left[\int_{-\infty}^{z-x} h(y)\, dy \right] dx.$$

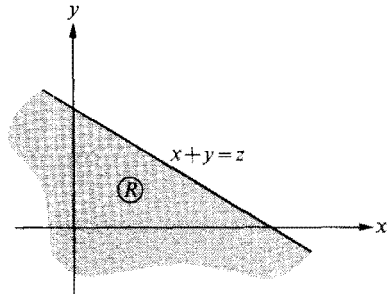


FIGURA 12.5

Diferenciando $S(z)$ respecto a z (bajo el signo integral, lo cual puede justificarse) obtenemos

$$s(z) = S'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(z - x)\, dx,$$

lo que está de acuerdo con la ecuación (12.6).

e) Puesto que la distribución de $X + Y$ debería posiblemente ser la misma que la distribución de $Y + X$, podríamos verificar que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y)g(z - y)\, dy$. Haciendo simplemente $z - x = y$ en la primera integral, producirá la segunda forma. Algunas veces indicamos esta propiedad al escribir $g * h = h * g$. Véase la Observación *a*) anterior.

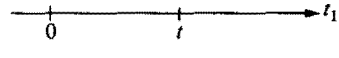


FIGURA 12.6

EJEMPLO 12.9. Se consideran dos instrumentos electrónicos, D_1 y D_2. Supóngase que D_1 tiene una duración que se puede representar con una variable aleatoria T_1 que tiene distribución exponencial con parámetro α_1, mientras que D_2 tiene una duración que se puede representar con una variable aleatoria T_2 que tiene distribución exponencial con parámetro α_2. Suponiendo que D_1 y D_2 están conectadas de tal manera que D_2 empieza a funcionar en el momento en que D_1 deja de hacerlo, entonces $T = T_1 + T_2$ representa el tiempo total en que está funcionando el sistema formado por los dos instrumentos. Suponiendo que T_1 y T_2 son independientes, podemos aplicar el resultado anterior para obtener

$$g(t_1) = \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_1}, \quad t_1 \geq 0,$$

$$h(t_2) = \alpha_2 e^{-\alpha_2 t_2}, \quad t_2 \geq 0.$$

(¡Para todos los otros valores de t_1 y t_2, las funciones g y h se suponen igual a cero!). Por tanto, usando la ecuación (12.6) encontramos que la fdp de $T_1 + T_2 = T$ está dada por

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t_1)h(t - t_1)\, dt_1, \quad t \geq 0.$$

El integrando es positivo si y sólo si *ambos* factores del integrando son positivos; es decir cada vez $t_1 \geq 0$ y $t - t_1 \geq 0$. Esto equivale a $t_1 \geq 0$ y $t_1 \leq t$, lo cual, a su vez, es equivalente a $0 \leq t_1 \leq t$. (Véase la Fig. 12.6.) Luego, la integral anterior se convierte en

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_1} \alpha_2 e^{-\alpha_2 (t-t_1)}\, dt_1 \\ &= \alpha_1 \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} \int_0^t e^{-t_1(\alpha_1 - \alpha_2)}\, dt_1 \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}(e^{-t\alpha_1} - e^{-t\alpha_2}) \quad \text{para} \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Observaciones: a) Nótese que la suma de dos variables aleatorias independientes, distribuidas exponencialmente, *no* está distribuida exponencialmente.

b) Para $\alpha_1 > \alpha_2$, la gráfica de fdp de T se muestra en la figura 12.7.

c) La expresión anterior para la fdp no está definida para $\alpha_1 = \alpha_2$, es decir, para el caso donde T_1 y T_2 tengan la misma distribución exponencial. A fin de tener cuidado con este caso especial, consideremos la primera integral de $s(t)$ y hagamos $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Obtenemos

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \alpha e^{-\alpha t_1} \alpha e^{-\alpha(t-t_1)}\, dt_1 \\ &= \alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t dt_1 = \alpha^2 t e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

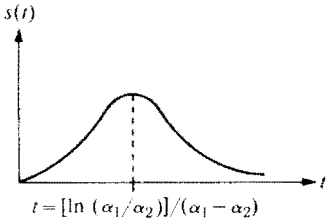


FIGURA 12.7

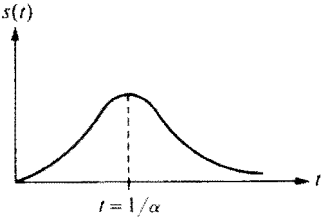


FIGURA 12.8

Ésta representa una distribución gama (véase la Ec. (9.16). La gráfica de esta fdp aparece en la figura 12.8. El máximo ocurre para $t = 1/\alpha = E(T_1) = E(T_2)$.

EJEMPLO 12.10. Reconsideremos el ejemplo 12.6, que trata de la suma de dos voltajes aleatorios independientes, V_1 y V_2, cada uno de los cuales está distribuido uniformemente en [0,10]. Así,

$$f(v_1) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leq v_1 \leq 10,$$

$$g(v_2) = \frac{1}{10}, \quad 0 \leq v_2 \leq 10.$$

(Recuérdese nuevamente que las funciones f y g son cero para cualquier otro valor). Si $V = V_1 + V_2$, tenemos

$$s(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_1)g(v - v_1)\, dv_1.$$

Razonando como en el ejemplo 12.8, observamos que el integrando es distinto de cero sólo para aquellos valores de v_1 que satisfacen $0 \leq v_1 \leq 10$ y $0 \leq v - v_1 \leq 10$. Estas condiciones equivalen a $0 \leq v_1 \leq 10$ y a $v - 10 \leq v_1 \leq v$.

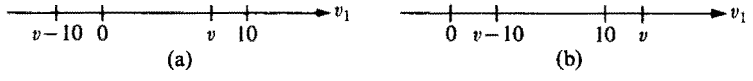


FIGURA 12.9

Existen dos casos, como se indica en la figura 12.9.

a) $v - 10 \leq 10$ y $0 \leq v \leq 10$ que juntas implican que $0 \leq v \leq 10$.
b) $0 \leq v - 10 \leq 10$ y $v \geq 10$ que juntas implican que $10 \leq v \leq 20$.

En el caso *a*), v_1 puede tomar valores entre 0 y v, mientras que en el caso *b*), v_1 puede tomar valores entre $v - 10$ y 10.

Así obtenemos

$$\text{para } 0 \le v \le 10: \quad s(v) = \int_0^v \frac{1}{10}\frac{1}{10}\, dv_1 = \frac{v}{100},$$

$$\text{para } 10 \le v \le 20: \quad s(v) = \int_{v-10}^{10} \frac{1}{10}\frac{1}{10}\, dv_1 = \frac{20-v}{100}.$$

Luego, la fdp de V tiene la gráfica que se muestra en la figura 12.10.

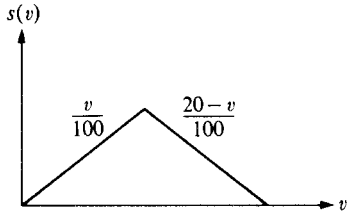


FIGURA 12.10

EJEMPLO 12.11. Como una ilustración final de las sumas de variables aleatorias, reconsideremos un resultado que ya hemos probado, usando el método más indirecto de las funciones generadoras de momentos (véase el Ej. 10.11), esto es, la suma de dos variables aleatorias normales independientes otra vez está distribuida normalmente. A fin de evitar algunas operaciones algebraicas complicadas, consideremos sólo un caso especial.

Supóngase que $Z = X + Y$, donde X y Y son variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0,1)$. Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Por lo tanto, la fdp de Z está dada por

$$s(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(z-x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{-(z-x)^2/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)[x^2+z^2-2zx+x^2]}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2-zx)}\, dx$$

Completando el cuadrado en el exponente del integrando, obtenemos

$$(x^2 - zx) = \left[\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4}\right].$$

Luego,

$$s(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/2} e^{z^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1/2)[\sqrt{2}(x-z/2)]^2}\, dx\,.$$

Sea $\sqrt{2}(x - z/2) = u$; entonces $dx = du/\sqrt{2}$ y obtenemos

$$s(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-z^2/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\, du.$$

La integral anterior (incluyendo el factor $1/\sqrt{2\pi}$ es igual a uno. Así,

$$s(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-(1/2)(z/\sqrt{2})^2}.$$

Pero ésta representa la fdp de una variable aleatoria con distribución $N(0, 2)$, lo cual se iba a demostrar.

Al presentar la distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes, nos hemos limitado a variables aleatorias continuas. En el caso discreto, el problema es un poco más sencillo, al menos en ciertos casos, como lo indica el teorema siguiente.

Teorema 12.3. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes, cada una de las cuales puede tomar sólo valores enteros no negativos. Sea $p(k) = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ y sea $q(r) = P(Y = r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ Sea $Z = X + Y$ y sea $w(i) = P(Z = i)$. Entonces,

$$w(i) = \sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Demostración:

$$\begin{aligned} w(i) &= P(Z = i) \\ &\quad P[X = 0, Y = i \text{ o } X = 1, Y = i - 1 \text{ o } \ldots \text{ o } X = i, Y = 0] \\ &= \sum_{k=0}^{i} P[X = k, Y = i - k] = \sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k) \end{aligned}$$

puesto que X y Y son independientes.

Observación: Nótese la similitud entre esta suma y la integral de convolución derivada en el teorema 12.2.

EJEMPLO 12.12. X y Y representan el número de partículas α emitidas por dos fuentes de material radioactivo durante un periodo de tiempo especificado de longitud t. Supóngase que X y Y tienen distribución de Poisson con parámetros $\beta_1 t$ y $\beta_2 t$, respectivamente. $Z = X + Y$ representa el número total de partículas α emitidas por las dos fuentes. Usando el teorema 12.3, obtenemos

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k) \\ &= e^{-(\beta_1+\beta_2)t} \sum_{k=0}^{i} \frac{(\beta_1 t)^k (\beta_2 t)^{i-k}}{k!(i-k)!} \\ &= e^{-(\beta_1+\beta_2)t} \frac{(\beta_1 t + \beta_2 t)^i}{i!}. \end{aligned}$$

(La última igualdad se obtiene aplicando el teorema del binomio a la suma anterior.) La última expresión representa la probabilidad de que una variable aleatoria, que tiene una distribución de Poisson con parámetro $\beta_1 t + \beta_2 t$, tome el valor i. Así comprobamos lo que ya sabíamos: la suma de dos variables aleatorias independientes de Poisson tiene una distribución de Poisson.

PROBLEMAS

12.1. *a*) Una fábrica produce determinados artículos de tal manera que el 2% resulta defectuoso. Un gran número de tales artículos, digamos n, se inspecciona, y se anota la frecuencia relativa de los defectuosos, digamos f_D. ¿Cuán grande debería ser n a fin de que la probabilidad sea al menos 0.98 de que f_D difiera de 0.02 en menos de 0.05?

b) Contestar *a*) si 0.02, la probabilidad de obtener un artículo defectuoso, se sustituye por p que se supone desconocida.

12.2. Supóngase que se obtiene una muestra de tamaño n de un gran conjunto de pernos, el 3% de los cuales es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo el 5% de los pernos elegidos sea defectuoso si:

a) $n = 6$? *b*) $n = 60$? *c*) $n = 600$?

12.3. *a*) Un sistema está constituido por 100 componentes que funcionan independientemente. La probabilidad de que cualquier componente falle durante el periodo de operación es igual a 0.10. A fin de que el sistema completo funcione, al menos deben funcionar 85 componentes. Calcular esta probabilidad.

b) Supóngase que el sistema anterior está formado por n componentes, cada uno con una confiabilidad de 0.90. El sistema funcionará si al menos el 80% de los componentes funciona correctamente. Determinar n, de modo que el sistema tenga una confiabilidad de 0.95.

12.4. Supóngase que 30 instrumentos electrónicos, $D_1, \ldots, D_{30}$, se usan de la manera siguiente: tan pronto como D_1 falla, D_2 empieza a actuar. Cuando D_2 falla, D_3 empieza a actuar, etc. Supóngase que el tiempo para que ocurra la falla de D_i es una variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro $\beta = 0.1$ hora^{-1}. Si T es el tiempo total de operación de los 30 instrumentos, ¿cuál es la probabilidad de que T exceda 350 horas?

12.5. Al sumar números, un computador aproxima cada número al entero más próximo. Suponer que todos los errores de aproximación son independientes y distribuidos uniformemente entre (–0.5, 0.5).

a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

b) ¿Cuántos números pueden sumarse juntos para que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad 0.90?

12.6. Supóngase que X_i, $i = 1, 2, \ldots, 50$, son variables aleatorias independientes, cada una con distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 0.03$. Sea $S = X_1 + \cdots + X_{50}$.

a) Usando el teorema del límite central, calcular $P(S \geq 3)$.

b) Comparar la respuesta de *a*) con el valor exacto de esta probabilidad.

12.7. En un circuito simple se conectan dos resistencias, R_1 yR_2 en serie. Por tanto, la resistencia total está dada por $R = R_1 + R_2$. Supóngase que R_1 y R_2 son variables aleatorias independientes, cada una con la fdp

$$f(r_i) = \frac{10 - r_i}{50}, \quad 0 < r_i < 10, \quad i = 1, 2.$$

Encontrar la fdp de R, (la resistencia total) y dibujar la gráfica.

12.8. Supóngase que las resistencias en el problema 12.7 están conectadas en paralelo. Encontrar la fdp de R, la resistencia total del circuito (establecerla sólo en forma integral). [*Indicación:* La relación entre R, y R_1, y R_2 está dada por $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.]

12.9. Al medir T, la duración de un artículo, se puede cometer un error que puede suponerse distribuido uniformemente entre (-0.01 y 0.01). Luego, el tiempo anotado (en horas) se puede representar como $T+X$, donde T tiene una distribución exponencial con parámetro 0.2 y X tiene la distribución uniforme ya descrita. Si T y X son independientes, encontrar la fdp de $T + X$.

12.10. Supóngase que X y Y son variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente y que la fdp de X (y, por tanto, de Y) está dada por

$$f(x) = a/x^2, \quad x > a, \quad a > 0,$$
$$= 0, \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Encontrar la fdp de $X + Y$. [*Indicación:* Usar fracciones parciales para la integración.]

12.11. Realizar los cálculos sugeridos al final del ejemplo 12.5.

12.12. *a*) Un instrumento tiene un tiempo T para fallar, cuya distribución está dada por $N(100, 4)$. Supóngase que al anotar T se comete un error, cuyo valor se puede representar con una variable aleatoria X distribuida uniformemente en (-1,1). Si X y T son independientes, obtener la fdp de $S = X + T$ en términos de Φ, la fdp de la distribución $N(0, 1)$.

b) Calcular $P(100 \leq S \leq 101)$. [*Indicación:* Usar la regla de Simpson para aproximar la integral.]

12.13. Supóngase que un aparato nuevo se prueba repetidamente en ciertas condiciones de tensión hasta que falla. La probabilidad de fallar en cualquier ensayo es p_1. Sea X igual al número de ensayos necesarios hasta la primera falla, inclusive. También se prueba un segundo aparato hasta que falla. Supóngase que la probabilidad constante de falla de p_2 está asociada con él. Sea Y igual al número de ensayos necesarios hasta su primera falla, inclusive. Supóngase que X y Y son independientes y sea $Z = X + Y$. Por tanto, Z es igual al número de ensayos necesarios hasta que ambos aparatos hayan fallado.

a) Encontrar la distribución de probabilidad de Z.
b) Calcular $P(Z = 4)$ si $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$.
c) Analizar *a*) si $p_1 = p_2$.

13

Muestras y distribuciones muestrales

13.1 Introducción

Consideremos de nuevo un problema expuesto previamente. Supóngase que tenemos una fuente de material radioactivo que emite partículas α y que son válidas las suposiciones establecidas en el capítulo 8; así, la variable aleatoria X definida como el número de partículas emitidas durante un periodo de tiempo especificado t, tiene una distribución de Poisson con parámetro λt.

A fin de "usar" este modelo probabilístico para describir la emisión de partículas α necesitamos conocer el valor de λ. Las suposiciones que formulamos sólo conducen a la conclusión de que X tiene una distribución de Poisson con un parámetro λt. Pero si deseamos calcular $P(X > 10)$, por ejemplo, la respuesta será en términos de λ a no ser que conozcamos su valor numérico. En forma similar, los parámetros importantes asociados con la distribución, tales como $E(X)$ y $V(X)$, son funciones de λ.

Para buscar un valor numérico de λ debemos dejar, al menos por el momento, el mundo de nuestros modelos matemáticos teóricos y entrar al mundo de las observaciones. Es decir, en este instante debemos

observar la emisión de partículas, obtener los valores numéricos de X y luego utilizar esos valores de manera sistemática a fin de obtener una información atinada de λ.

Es importante para el lector tener una idea precisa acerca de la relación entre la verificación empírica y la deducción matemática que aparece en muchas áreas de matemáticas aplicadas. Esto es relevante cuando construimos modelos probabilísticos para el estudio de fenómenos observables.

Consideremos un ejemplo trivial de trigonometría elemental. Un problema típico puede implicar el cálculo de la altura de un árbol. Un modelo matemático para este problema podría obtenerse al postular que la relación entre la altura desconocida h, el largo de la sombra s y el ángulo α es de la forma $h = s \tan \alpha$. (Suponemos que el árbol permanece derecho y perpendicular al suelo, Fig. 13.1.) Por tanto, si s y α son conocidas, con ayuda de una tabla apropiada podemos calcular h. El hecho importante que aquí formulamos es que s y α deben ser *conocidas* antes de que podamos evaluar h. Es decir, alguien debe haber medido s y α. La deducción matemática que conduce a la relación $h = s \tan \alpha$ es completamente independiente de los medios con los cuales medimos s y α. Si esas mediciones son exactas, entonces $s \tan \alpha$ representará un valor exacto de h (suponiendo que el modelo es válido). En otras palabras, no podemos deducir simplemente el valor de h con nuestros conocimientos de trigonometría y con la ayuda de las tablas trigonométricas. ¡Debemos dejar nuestro santuario (cualquiera que sea) y hacer algunas mediciones! Y la manera de hacer esas mediciones de ningún modo influye en la *validez* de nuestra deducción matemática, aunque el problema por resolver sea importante.

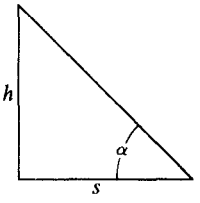


FIGURA 13.1

Al usar los modelos probabilísticos necesitaremos entrar nuevamente al mundo empírico y hacer algunas mediciones. Por ejemplo, en el caso que consideramos se usa la distribución de Poisson como modelo probabilístico y, por tanto, necesitamos conocer el valor del parámetro λ. A fin de obtener alguna información acerca de λ debemos hacer algunas mediciones y luego usarlas de manera sistemática con objeto de calcular λ. En el capítulo 14 describiremos la forma de hacer este cálculo.

Finalmente, debemos insistir aquí en dos puntos. Primero, las mediciones necesarias para obtener información respecto a λ serán en general más fáciles de obtener que las que resultarían de mediciones directas

para $e^{\lambda t}(\lambda t)^k/k!$ (así como es más fácil obtener mediciones para el largo de la sombra s y el ángulo α, que para la altura h). Segundo, la manera como obtenemos mediciones para λ y el modo como usamos esas mediciones de ninguna forma invalida (o confirma) la aplicación del modelo de Poisson.

Lo anterior es un ejemplo típico de una gran clase de problemas. En muchos casos es relativamente natural (y apropiado) formular la hipótesis de que una variable aleatoria X tiene una distribución particular de probabilidades. Ya hemos visto varios ejemplos que indican que suposiciones muy simples acerca de la conducta probabilística de X conducirán a un tipo determinado de distribuciones tales como la binomial, exponencial normal, de Poisson y otras. Cada una de esas distribuciones depende de ciertos parámetros. En algunos casos, el valor de uno o más parámetros puede ser conocido. (Tal conocimiento puede provenir del estudio previo de las variables aleatorias.) Muy a menudo, sin embargo, no conocemos el valor de los parámetros implicados. En tales casos debemos proceder como se sugirió anteriormente y obtener algunos valores empíricos de X y luego usar esos valores de alguna manera apropiada. En el capítulo 14, veremos cómo se hace esto.

13.2 Muestras aleatorias

Previamente hemos presentado la noción de muestreo aleatorio con o sin sustitución de un conjunto finito de objetos o *población* de objetos. Tenemos que considerar una población específica de objetos (personas, artículos, manufacturados, etc.) acerca de la cual queremos hacer alguna inferencia sin tomar en cuenta cada objeto particular. Así "muestreamos", es decir, tratamos de considerar algunos objetos "típicos" de los cuales esperamos extraer alguna información que de algún modo sea característica de la población completa. Seamos más precisos.

Supongamos que se designan consecutivamente cada uno de los elementos de una población finita de modo que, sin perder generalidad, una población que consta de N objetos puede representarse como $1, 2, \ldots, N$. Elijamos ahora n artículos, de la manera que se describe a continuación. Definamos la siguiente variable aleatoria.

X_i = valor poblacional obtenido cuando se escoge el i-ésimo artículo, $i = 1, 2, \ldots, n$.

La distribución de probabilidades de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ depende obviamente de cómo vamos a muestrear. Si el muestreo es con

sustitución, escogiendo cada vez un objeto al azar, las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas. Es decir, para cada X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$P(X_i = j) = 1/N, \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

Si el muestreo es sin sustitución las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ ya no son independientes. En este caso, su distribución conjunta de probabilidades está dada por

$$P[X_1 = j_1, \ldots, X_n = j_n] = \frac{1}{N(N-1)\cdots(N-n+1)},$$

donde $j_1, \ldots, j_n$ son n valores cualesquiera de $(1, \ldots, N)$. (Podemos demostrar que la distribución marginal de cualquier X_i) independientemente de los valores tomados por $X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n$, es la misma que la anterior cuando el muestreo se hace con sustitución.)

Hasta ahora, en nuestra exposición, hemos supuesto que existe una población principal, $1, 2, \ldots, N$ que es finita y acerca de la cual queremos tener una información basada en una muestra de tamaño $n < N$. En muchos casos no hay ninguna población finita de la cual obtengamos muestras; de hecho, podemos tener dificultades al definir una población principal de cualquier clase. Consideremos los ejemplos siguientes.

a) Se lanza una moneda. Definamos la variable aleatoria X_1 = número de caras obtenidas. Sólo en un aspecto podemos pensar que X_1 es una muestra de tamaño uno de la "población" de todos los lanzamientos posibles de esa moneda. Si lanzamos la moneda una segunda vez y definimos la variable aleatoria X_2 como el número de caras obtenidas con el segundo lanzamiento, X_1, X_2 posiblemente se puede considerar como una muestra de tamaño dos de la *misma* población.

b) La precipitación total anual en cierta localidad durante el año 1970 podría definirse como una variable aleatoria X_1. Durante los años siguientes, las variables aleatorias $X_2, \ldots, X_n$ pudieron definirse análogamente. Podemos considerar de nuevo $(X_1, \ldots, X_n)$ como una muestra de tamaño n, obtenida de la población de todas las precipitaciones anuales posibles en esa localidad específica, y podría suponerse en forma realista que las X_i son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas.

c) La duración de una bombilla fabricada mediante cierto procedimiento se estudia escogiendo n bombillas y midiendo su duración,

$T_1, \ldots, T_n$. Podemos considerar $(T_1, \ldots, T_n)$ como una muestra aleatoria de la población de todas las duraciones posibles de las bombillas fabricadas de esa manera específica.

Formalicemos esas nociones como sigue.

Definición. Sea X una variable aleatoria con cierta distribución de probabilidades. Sean $X_1, \ldots, X_n$ n variables aleatorias independientes cada una con la misma distribución que X. Llamamos entonces a $(X_1, \ldots, X_n)$ *muestra aleatoria de la variable aleatoria* X.

Observaciones: a) Establezcamos de una manera más informal lo anterior: una muestra aleatoria de tamaño n de una variable aleatoria X corresponde a n mediciones repetidas de X, hechas básicamente en las mismas condiciones. Como ya lo hemos dicho en otros contextos, la noción matemáticamente idealizada de una muestra aleatoria se puede, en el mejor de los casos, aproximar sólo por las condiciones experimentales reales. A fin de que X_1 y X_2 tengan la misma distribución, todas las condiciones "relevantes" en las que se realiza el experimento deben ser las mismas cuando se observa X_1 que cuando se observa X_2. Por supuesto, las condiciones experimentales nunca se pueden duplicar idénticamente. Lo importante es que esas condiciones, que son diferentes, deben tener poco o ningún efecto en el resultado del experimento. Sin embargo, algún cuidado deberá tenerse para asegurarnos de que en realidad obtengamos una muestra aleatoria.

Por ejemplo, supóngase que la variable aleatoria que se considera es X, el número de llamadas que llegan a una central telefónica el miércoles entre las 4 PM y las 5 PM. A fin de obtener una muestra aleatoria de X, posiblemente deberíamos elegir n miércoles al azar y anotar el valor de $X_1, \ldots, X_n$. Tendríamos que estar seguros de que todos los miércoles son miércoles "típicos". Por ejemplo, podríamos no incluir un miércoles particular si coincide con Navidad.

Nuevamente, si tratamos de obtener una muestra aleatoria X de la variable aleatoria X definida como la duración de un instrumento electrónico que se fabrica con determinadas especificaciones, desearíamos asegurarnos de que no se ha obtenido un valor muestral de un artículo producido durante un momento en que el proceso de producción estaba fallando.

b) Si X es una variable aleatoria continua con fdp f y si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de X, entonces g, la fdp conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, puede escribirse como $g(x_1, \ldots, x_n) = f(X_1) \cdots f(x_n)$. Si X es una variable aleatoria discreta y $p(x_i) = P(X = x_i)$, entonces

$$P[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = p(x_1) \cdots p(x_n).$$

c) Tal como lo hicimos antes, usaremos letras mayúsculas para las variables aleatorias y letras minúsculas para el valor de la variable aleatoria. Así, los

valores que toma una muestra $(x_1, \ldots, x_n)$ se denotarán con $(x_1, \ldots, x_n)$. A menudo hablaremos del *punto muestral* $X_1, \ldots, X_n$. Con esto indicaremos simplemente que consideramos a $(x_1, \ldots, x_n)$ como las coordenadas de un punto en un espacio euclidiano n dimensional.

*13.3 Estadísticos**

Una vez que hemos obtenido los valores de una muestra aleatoria, habitualmente queremos usar esos valores muestrales con el objeto de hacer alguna inferencia respecto de la población representada por la muestra que, en el presente contexto, significa la distribución de probabilidades de la variable aleatoria que se está muestreando. Puesto que los diversos parámetros que caracterizan una distribución de probabilidades son números, es natural que queramos calcular ciertas características numéricas específicas que se obtienen de los valores muestrales, lo que nos podría servir para hacer proposiciones apropiadas acerca de los valores de los parámetros que a menudo no son conocidos. Definamos el siguiente concepto importante.

Definición. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable aleatoria X y sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores tomados por la muestra. Sea H una función definida para la n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$. Definimos $Y = H(X_1, \ldots, X_n)$ como un estadístico que toma el valor $y = H(x_1, \ldots, x_n)$.

En palabras, un estadístico es una función real de la muestra. Algunas veces usamos el término estadístico para referirnos al valor de la función. Así podemos hablar del estadístico $y = H(x_1, \ldots, x_n)$ cuando en realidad deberíamos decir que y es el valor del estadístico $Y = H(X_1, \ldots, X_n)$.

Observaciones: a) El uso anterior es muy especial, pero en general aceptado, del término estadístico. Obsérvese que lo estamos usando en singular.

b) De acuerdo con la definición anterior, ¡un estadístico es una variable aleatoria! Es muy importante recordar esto. Por lo tanto, ahora será útil considerar la distribución de probabilidades de un estadístico, su esperanza y su varianza. Cuando una variable aleatoria es en realidad un estadístico, es decir,

*N. del T. El autor emplea la palabra *statistics*, que hemos traducido como estadístico por ser lo más comúnmente empleado en español.

una función de una muestra, a menudo hablamos de su *distribución muestral*, en vez de su distribución de probabilidades.

Como sugerimos al principio de este capítulo, usaremos la información obtenida de una muestra con el objeto de estimar ciertos parámetros desconocidos asociados con una distribución de probabilidades. Encontraremos que ciertos estadísticos desempeñan un papel importante en la solución de este problema. Antes de que consideremos esto con más detalles (en el capítulo 14), estudiemos algunos estadísticos importantes y sus propiedades.

13.4 Algunos estadísticos importantes

Hay ciertos estadísticos que encontraremos a menudo. A continuación veremos unos cuantos y expondremos algunas de sus propiedades importantes.

Definición. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria X. Los siguientes estadísticos son de interés.

a) $\overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ se llama *promedio muestral.*
b) $S^2 = [1/(n-1)]\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ se llama *varianza muestral.* En forma breve explicaremos por qué dividimos entre $(n-1)$, en vez de elegir simplemente n.)
c) $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$ se llama *mínimo de la muestra.* (K representa simplemente el valor observado más pequeño.)
d) $M = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$ se llama *máximo de la muestra.* (M representa el mayor valor observado.)
e) $R = M - K$ se llama *recorrido muestral.*
f) $X_n^{(j)} = j$-ésima observación mayor en la muestra, $j = 1, 2, \ldots, n$. (Tenemos que $X_n^{(1)} = M$, mientras que $X_n^{(n)} = K$.)

Observaciones: a) Las variables aleatorias $X_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ se llaman *estadísticos de orden* asociados con la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$. Si X es una variable aleatoria continua podemos suponer que $X_n^{(1)} > X_n^{(2)} > \cdots > X_n^{(n)}$.

b) Los valores extremos de la muestra (en la notación anterior, $X_n^{(1)}$ y $X_n^{(n)}$) son a menudo de interés considerable. Por ejemplo, en la construcción de represas para controlar inundaciones, la mayor altura que ha alcanzado un río en los 50 años anteriores puede ser muy importante.

Por supuesto hay muchos otros estadísticos importantes, pero evidentemente los mencionados desempeñan un papel notable en muchas aplicaciones estadísticas. Estableceremos (y demostraremos) algunos teoremas relacionados con los estadísticos anteriores.

Teorema 13.1. Sea X una variable aleatoria con esperanza $E(X) = \mu$ y varianza $V(X) = \sigma^2$. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral de una muestra aleatoria de tamaño n. Entonces,

a) $E(\overline{X}) = \mu$.
b) $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$.
c) Para n grande, $(\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ tiene aproximadamente la distribución $N(0, 1)$.

Demostración: a) y *b*) se deducen de manera inmediata de las propiedades de la esperanza y de la varianza antes establecidas:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}n\mu = \mu.$$

Puesto que los X_i son independientes,

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

c) se deduce de una aplicación directa del teorema del límite central. Podemos escribir $\overline{X} = (1/n)X_1 + \cdots + (1/n)X_n$ como la suma de variables aleatorias independientemente distribuidas.

Observaciones: a) Cuando el tamaño de muestra aumenta, el promedio muestral $\overline{X}$ tiende a variar cada vez menos. Esto es intuitivamente evidente y corresponde a nuestra experiencia con datos numéricos. Considérese, por ejemplo, el conjunto siguiente de 18 números

$$-1, 3, 2, -4, -5, 6, 7, 2, 0, 1, -2, -3, 8, 9, 6, -3, 0, 5.$$

Si calculamos el promedio de esos números, tomando dos a la vez en el orden anotado, obtenemos el siguiente conjunto de promedios:

$$1, -1, 0.5, 4.5, 0.5, -2.5, 8.5, 1.5, 2.5.$$

Si promediamos el conjunto original de números, tomando tres a la vez, obtenemos

$$1.3, -1, 3. - 1.3, 7.7, 0.7.$$

Finalmente, si promediamos los números, tomando seis a la vez, obtenemos

$$0.2, 0.8, 4.1.$$

La varianza en cada uno de esos conjuntos de promedios es menor que en el conjunto anterior, debido a que en cada caso el promedio está basado en un número mayor de valores. El teorema anterior indica precisamente cómo la variación de $\overline{X}$ (medida en términos de su varianza) disminuye cuando aumenta n. (En relación con esto véase la ley de los grandes números, Sec. 12.2 y en particular la Ec. 12.2.)

b) Si n no es suficientemente grande para asegurar la aplicación del teorema del límite central, podemos tratar de encontrar la distribución exacta de probabilidades de $\overline{X}$ por un medio directo (pero en general más complicado). En la sección 12.6 sugerimos un método mediante el cual podemos encontrar la distribución de probabilidades de la suma de variables aleatorias. Con una aplicación repetida de este método podemos obtener la distribución de probabilidades de $\overline{X}$, en especial si n es relativamente pequeña.

c) El teorema 13.1 indica que para una n suficientemente grande, el promedio muestral $\overline{X}$ tiene una distribución aproximadamente normal (con esperanza μ y varianza σ^2/n).

Encontramos que no sólo $\overline{X}$, sino la mayor parte de las funciones "con buen comportamiento" de $\overline{X}$ tienen esta propiedad. En este nivel de presentación no podemos dar un desarrollo cuidadoso de este resultado. Sin embargo, el resultado es de gran importancia en muchas aplicaciones para sostener a lo menos un argumento heurístico e intuitivo.

Supóngase que $Y = r(\overline{X})$ y que r se puede desarrollar en una serie de Taylor respecto a μ. Así $r = (\overline{X}) = r(\mu) + (\overline{X} - \mu)r'(\mu) + R$, donde R es el término del resto y puede expresarse como $R = [(\overline{X} - \mu)^2/2]r''(z)$, donde z es un valor comprendido entre $\overline{X}$ y μ. Si n es suficientemente grande, $\overline{X}$ estará cercana a μ y, por tanto, $(\overline{X} - \mu)^2$ será pequeña comparada con $(\overline{X} - \mu)$. Para n grande, podemos considerar, por tanto, que el resto es despreciable y *aproximar* $r(\overline{X})$ como sigue:

$$r(\overline{X}) \simeq r(\mu) + r'(\mu)(\overline{X} - \mu).$$

Vemos que para una n suficientemente grande, $r(\overline{X})$ se puede aproximar por una función *lineal* de $\overline{X}$. Puesto que $\overline{X}$ será aproximadamente normal (para una n grande), encontramos que $r(\overline{X})$ también será aproximadamente normal, puesto que una función lineal de una variable aleatoria distribuida normalmente está también distribuida normalmente.

De la representación anterior de $r(\overline{X})$ encontramos que

$$E\left(r(\overline{X})\right) \simeq r(\mu), \quad V\left(r(\overline{X})\right) \simeq \frac{[r'(\mu)]^2\sigma^2}{n}.$$

Así, para una n suficientemente grande, vemos que la distribución de $r(\overline{X})$ es aproximadamente $N(r(\mu), [r'(\mu)]^2\sigma^2/n)$ (en condiciones muy generales de la función r).

Teorema 13.2. Sea X una variable aleatoria continua con fdp f y fda F. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X y sean K y M el mínimo y el máximo de la muestra, respectivamente. Luego:

a) la fdp de M está dada por $g(m) = n[F(m)]^{n-1}f(m)$,
b) la fdp de K está dada por $h(k) = n[1 - F(k)]^{n-1}f(k)$.

Demostración: Sea $G(m) = P(M \leq m)$ la fda de M. Ahora $\{M \leq m\}$ es equivalente al evento $\{X_i \leq m$, para toda $i\}$. Por tanto, puesto que las X_i son independientes, encontramos

$$G(m) = P[X_1 \leq m \text{ y } X_2 \leq m \cdots \text{ y } X_n \leq m] = [F(m)]^n.$$

Por tanto,

$$g(m) = G'(m) = n\,[F(m)]^{n-1}\,f(m).$$

La obtención de la fdp de K se deja al lector. (Véase el Prob. 13.1.)

EJEMPLO 13.1. Un instrumento electrónico tiene una duración T que está distribuida exponencialmente con parámetro $\alpha = 0.0001$, es decir, su fdp es $f(t) = 0.001e^{-0.001t}$. Supóngase que se prueban 100 de tales instrumentos, lo que da valores observados $T_1, \ldots, T_{100}$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que $950 < \overline{T} < 1100$? Puesto que el tamaño de muestra es muy grande, podemos aplicar el teorema del límite central y proceder como sigue:

$$E(\overline{T}) = \frac{1}{0.001} = 1000, \quad V(\overline{T}) = \frac{1}{100}(0.001)^{-2} = 10.000.$$

Por lo tanto, $\overline{T} - 1000/100$ tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$. Así,

$$\begin{aligned} P(950 < \overline{T} < 1100) &= P\left(-0.5 < \frac{\overline{T} - 1000}{100} < 1\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0.5) \\ &= 0.532, \end{aligned}$$

de las tablas de la distribución normal.

Observación: En el caso presente podemos obtener en forma inmediata la distribución exacta de $\overline{T}$ sin recurrir al teorema del límite central. En el teorema 10.9 demostramos que la suma de variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente tiene una distribución gama, es decir,

$$g(s) = \frac{(0.001)^{100} s^{99} e^{-0.001s}}{99!},$$

donde g es la fdp de $T_1 + \cdots + T_{100}$. Luego, la fdp de $\overline{T}$ está dada por

$$f(\bar{t}) = \frac{(0.1)^{100} \bar{t}^{99} e^{-0.1\bar{t}}}{99!}.$$

Así, $\overline{T}$ tiene una distribución gama con parámetros 0.1 y 100.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mayor valor observado sobrepase 7200 horas? Necesitamos que $P(M > 7200) = 1 - P(M \leq 7200)$. El valor máximo será menor que 7200 si y sólo si cada valor de muestra es menor que 7200. Por lo tanto,

$$P(M > 7200) = 1 - [F(7200)]^{100}.$$

Para calcular $F(7200)$ recordemos que la variable aleatoria distribuida exponencialmente con parámetro 0.001, $F(t) = 1 - e^{-0.001t}$. Luego,

$$F(7200) = 1 - e^{0.001(7200)} = 1 - e^{-7.2} = 0.99925.$$

Así la probabilidad pedida es $1 - (0.99925)^{100}$, que es igual a 0.071.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo más corto para que ocurra una falla sea menor que diez horas? Pedimos que $P(K < 10) = 1 - P(K \geq 10)$.

El mínimo de la muestra ahora es mayor o igual a 10 si y sólo si cada valor muestral es mayor que o igual a 10. Por tanto,

$$P(K < 10) = 1 - [1 - F(10)]^{100}.$$

Usando la expresión de F como se dio en *b*), tenemos

$$1 - F(10) = e^{-0.001(10)} = e^{-0.01} = 0.99005.$$

Luego,

$$P(K < 10) = 1 - (0.99005)^{100} = 0.63.$$

La última parte del ejemplo anterior puede generalizarse como lo indica el teorema siguiente.

Teorema 13.3. Sea X una variable distribuida exponencialmente con parámetro α y sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria de X. Sea $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$. Entonces, K está también distribuida exponencialmente con parámetro $n\alpha$.

Demostración: Sea H la fda de K. Luego,

$$H(k) = P(K \leq k) = 1 - P(K > k) = 1 - [1 - F(k)]^n,$$

donde F es la fda de X. Ahora $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Así, $H(k) = 1 - e^{-n\alpha k}$. Derivando $H(k)$ respecto a k, se obtiene $h(k) = n\alpha e^{-n\alpha k}$.

Observación: Este teorema puede generalizarse como sigue. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y si X_i tiene una distribución exponencial con parámetro α_i, $i = 1, \ldots, n$, entonces $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$ tiene una distribución exponencial con parámetro $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Para una demostración de esto, véase el problema 13.2.

El teorema 13.4 nos da información acerca del estadístico S^2.

Teorema 13.4. Suponiendo que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una variable aleatoria X con esperanza μ y varianza σ^2. Sea

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

donde $\overline{X}$ es el promedio muestral. Entonces se tiene lo siguiente:

a) $E(S^2) = \sigma^2$.
b) Si X está distribuida normalmente, $[(n-1)/\sigma^2]S^2$ tiene una distribución χ-cuadrada con $(n-1)$ grados de libertad.

Demostración: a) Escribiendo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu + \mu - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \overline{X})(X_i - \mu) + (\mu - \overline{X})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 + 2(\mu - \overline{X})\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) + n(\mu - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - 2n(\mu - \overline{X})^2 + n(\mu - \overline{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 - n(\overline{X} - \mu)^2.
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right] = \sigma^2.$$

Observación: Si hubiésemos dividido entre n en vez de $(n-1)$ al definir S^2, la propiedad anterior no habría sido válida.

b) No demostraremos *b*), sólo haremos posible su validez al considerar el caso especial siguiente: Considérese $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ para $n = 2$. Entonces

$$\begin{aligned}(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 &= \left[X_1 - \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\right]^2 + \left[X_2 - \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\right]^2 \\ &= \tfrac{1}{4}[2X_1 - X_1 - X_2]^2 + \tfrac{1}{4}[2X_2 - X_1 - X_2]^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left[(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_1)^2\right] = \frac{[X_1 - X_2]^2}{2}.\end{aligned}$$

Puesto que X_1 y X_2 están distribuidas independientemente con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, encontramos que $(X_1 - X_2)$ tiene distribución $N(0, 2\sigma^2)$. Luego,

$$\left[\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\,\sigma}\right]^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2}S^2$$

tiene distribución χ-cuadrada con un grado de libertad. (Véase el Teorema 10.8.) La demostración para una n general sigue una línea semejante. Debemos demostrar que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ se puede descomponer en la suma de $(n-1)$ cuadrados de variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0, 1)$.

Observación: Aunque S^2 se define como la suma de los cuadrados de n términos, esos n términos no son independientes. En realidad, $(X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + \cdots + (X_n - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i - n\overline{X} = 0$. Por lo tanto, hay una relación lineal entre los n términos, lo que indica que tan pronto como se conozca alguno de los $(n-1)$, el n-ésimo estará determinado.

Finalmente, establezcamos (sin demostración) un resultado que se refiere a la distribución de probabilidades del recorrido de muestra R.

Teorema 13.5. Sea X una variable aleatoria continua con fdp f. Sea $R = M - K$ el recorrido de muestra basado en una muestra aleatoria de tamaño n. Luego, la fdp de R está dada por

$$g(r) = n(n-1)\int_{s=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x=s}^{s+r} f(x)\,dx\right]^{n-2} f(s)f(s+r)\,ds, \quad \text{para } r \geq 0.$$

EJEMPLO 13.2. Un voltaje aleatorio V está distribuido uniformemente en $[0,1]$. Se obtiene una muestra de tamaño n, digamos $V_1, \ldots, V_n$, y se calcula el recorrido muestral R. Encontramos que la fdp de R es

$$g(r) = n(n-1) \int_{s=-\infty}^{+\infty} r^{n-2} f(s) f(s+r)\, ds\,.$$

Tenemos $f(s) = f(s+r) = 1$ para cualquier $0 \leq s \leq 1$ y $0 \leq s+r \leq 1$, las que juntas implican que $0 \leq s \leq 1-r$. Por tanto,

$$g(r) = n(n-1) \int_0^{1-r} r^{n-2}\, ds$$

$$= n(n-1) r^{n-2}(1-r), \quad 0 \leq r \leq 1.$$

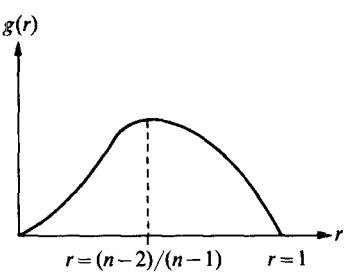


FIGURA 13.2

Para $n > 2$, la gráfica de la fdp de R tiene la forma que se indica en la figura 13.2. Obsérvese que cuando $n \to \infty$, el valor de r en el cual ocurre el máximo se desplaza a la derecha. Así, cuando el tamaño de la muestra aumenta, cada vez es más posible que el recorrido R esté cercano a 1, que es intuitivamente lo que esperaríamos.

13.5 La transformación integral

Una muestra de una variable aleatoria X puede usarse para obtener información acerca de parámetros desconocidos asociados con la distribución de probabilidades de X. Sin embargo, podemos usar una muestra con un propósito diferente. Podríamos tomar algunas observaciones de una variable aleatoria cuya distribución está completamente especificada y luego usar esos valores muestrales para aproximar ciertas probabilidades que sería muy difícil obtener con un cálculo matemático directo. Por ejemplo, suponiendo que X tiene una distribución $N(0,1)$ y queremos estudiar la variable aleatoria $Y = e^{-X} \operatorname{sen} X$. En especial, supongamos que queremos calcular $P(0 \leq Y \leq \frac{1}{2})$. A fin de obtener la respuesta exacta, necesitamos encontrar G, la fda de Y y luego calcular $G(\frac{1}{2}) - G(0)$. Encontraríamos mucha dificultad al hacer esto. Sin embargo, podemos usar otro planteamiento, el cual se basa en la idea de

simular el experimento que da origen a la variable aleatoria Y. Entonces usamos la frecuencia relativa como una aproximación a la probabilidad buscada. Si esta frecuencia relativa se basa en un número de observaciones suficientemente grande, la ley de los grandes números justifica nuestro procedimiento.

De manera específica supóngase que tenemos una muestra aleatoria de la variable aleatoria X anterior, cuya distribución está completamente especificada, $X_1, \ldots, X_n$. Para cada X_i definimos la variable aleatoria $Y = e^{-X_i} \operatorname{sen} X_i$. Luego evaluamos la frecuencia relativa n_A/n, donde n_A es igual al número de valores Y_i, digamos y_i, que satisfacen $0 \leq y_i \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, n_A/n es la frecuencia relativa del evento $0 \leq Y \leq \frac{1}{2}$, y si n es grande, esta frecuencia relativa estará "cercana" a $P[0 \leq Y \leq \frac{1}{2}]$, según la ley de los grandes números.

Para aplicar el procedimiento anterior, debemos encontrar un medio de "generar" una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de la variable aleatoria cuya distribución es $N(0, 1)$. Antes de indicar cómo se hace esto, expongamos en forma breve una distribución para la cual esta tarea ya se ha realizado debido a la disponibilidad de tablas. Supóngase que X está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. A fin de obtener una muestra aleatoria para tal variable aleatoria, sólo necesitamos consultar la *Tabla de números aleatorios* (véase el Apéndice). Esas tablas se han hecho de manera que sean útiles para este propósito. Para usarlas, simplemente seleccionamos una ubicación al azar en la tabla y luego obtenemos números a lo largo de filas o columnas. Si queremos usar esos números tabulados para representar valores entre 0 y 1, sólo se necesita poner un punto decimal al comienzo del número. Así, el número 4573, tal como se listó, se usaría para representar el número 0.4573, etcétera.

La disponibilidad de esas tablas de números aleatorios hace que la tarea de obtener una muestra aleatoria de una distribución arbitraria sea relativamente sencilla debido al resultado del teorema siguiente.

Teorema 13.6. Sea X una variable aleatoria con fdp f y fda F. [Se supone que $f(x) = 0$, $x \notin (a, b)$.] Sea Y la variable aleatoria definida por $Y = F(X)$. Luego, Y está distribuida uniformemente en $[0, 1]$. (Y se designa como *transformación integral* de X.)

Demostración: Puesto que X es una variable aleatoria continua, la fda F es una función continua estrictamente monótona con una inversa F^{-1}. Es decir, $Y = F(X)$ puede resolverse para X en términos de

$Y : X = F^{-1}(Y)$ (Véase la Fig. 13.3.) [Si $F(x) = 0$ para $x \leq a$, definimos $F^{-1}(0) = a$. De manera similar, si $F(x) = 1$ para $x \geq b$, definimos $F^{-1}(1) = b$.]

Sea G la fda de la variable aleatoria Y definida anteriormente. Entonces,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y) = P\left(X \leq F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y.$$

Por tanto, la fdp de Y, $g(y) = G'(y) = 1$. Esto establece nuestro resultado.

Observaciones: a) Comentemos brevemente cómo se observa en realidad el valor de una variable aleatoria Y. Observamos un valor de la variable aleatoria X, digamos x, luego calculamos el valor de $Y = F(X)$ como $y = F(x)$ donde F es la fda conocida de X.

b) El teorema 13.6 enunciado y demostrado anteriormente para variables aleatorias continuas también es válido para variables aleatorias discretas. Hay que hacer un pequeño cambio en la demostración, puesto que la fda de una variable aleatoria discreta es una función escalonada y no tiene una inversa única.

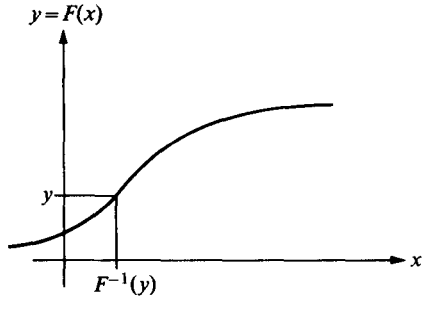


FIGURA 13.3

Podemos usar ahora el resultado anterior a fin de generar una muestra al azar de una variable aleatoria con una distribución específica. Consideraremos nuevamente sólo el caso continuo. Sea X una variable aleatoria continua con fda F de la cual se pide una muestra. Sea y_1 un valor (entre 0 y 1) obtenido de una tabla de números aleatorios. Puesto que $Y = F(X)$ está distribuida uniformemente en $[0, 1]$, podemos considerar a y_1 como una observación de esa variable aleatoria. Resolviendo la ecuación $y_1 = F(x_1)$ para x_1 (lo que es posible si X es continua), obtenemos un valor de una variable aleatoria cuya fda es F. Continuando este procedimiento con los números $y_2, \cdots, y_n$ obtenidos de una tabla

de números aleatorios, tenemos x_i, $i = 1, \ldots, n$, como solución de la ecuación $y_i = F(x_i)$ y, por tanto, tenemos nuestros valores muestrales requeridos.

EJEMPLO 13.3. Supóngase que queremos obtener una muestra de tamaño cinco de una variable aleatoria con distribución $N(2, 0.09)$ y supóngase que obtenemos los valores siguientes de una tabla de números aleatorios 0.487, 0.722, 0.661. 0.194, 0.336. Definamos x_1 como sigue:

$$0.478 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(0.3)} \int_{-\infty}^{x_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-2}{0.3}\right)^2\right] dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x_1-2)/0.3} \exp\left(\frac{-s^2}{2}\right) ds = \Phi\left(\frac{x_1-2}{0.3}\right).$$

De las tablas de la distribución normal encontramos que $(x_1 - 2)/0.3 = -0.03$. Luego $x_1 = (-0.03)(0.3) + 2 = 1.991$. Este número representa nuestro primer valor de muestra de la distribución especificada. Continuando de la misma manera con los otros valores obtenemos los siguientes valores adicionales de muestra: 2.177, 2.124, 1.742, 1.874.

El procedimiento anterior puede generalizarse como sigue. Para obtener un valor de muestra de la distribución $N(\mu, \sigma^2)$, obtenemos un valor muestral (entre 0 y 1) de una tabla de números aleatorios. El valor pedido x_1 está definido por la ecuación $\Phi((x_1 - \mu)/\sigma) = y_1$.

Observaciones: a) Para generar muestras aleatorias de una distribución específica existen métodos alternativos al antes sugerido. Véase el problema 13.8.

b) Uno de los aspectos que hace útil este planteamiento de "simulación" es la posibilidad de tener una muestra aleatoria muy *grande*. Esto es posible, especialmente, si se dispone de un computador electrónico.

EJEMPLO 13.4. El empuje T de un propulsor sólido de un sistema de cohetes es una función muy complicada de un número de variables. Si X = área de la garganta, Y = factor de la tasa de encendido, Z = área donde se quema el propulsor sólido, W = densidad del propulsor sólido, n = coeficiente de encendido y C_i = constante, $i = 1, 2, 3$, podemos expresar T como sigue:

$$T = C_1 \left(\frac{X}{YWZ}\right)^{1/(n-1)} X + C_2 \left(\frac{X}{YWZ}\right)^{1/(n-1)} + C_3.$$

En investigaciones anteriores se han hecho hipótesis plausibles: X, Y, W y Z son variables aleatorias independientes distribuidas normalmente con medias y varianzas conocidas. Cualquier intento para obtener la distribución de probabilidades de la variable aleatoria T o aun de expresiones exactas para $E(T)$ y $V(T)$ fracasará debido a la relación compleja entre X, Y, W, Z y T.

Si pudiéramos generar una muestra aleatoria (grande) de X, Y, Z y W, por ejemplo obtener 4-tuplas (X_i, Y_i, Z_i, W_i), podríamos luego generar una gran muestra de T, llamémosla $(T_1, \ldots, T_n)$ e intentar estudiar en forma empírica las características de la variable aleatoria T (en términos de la muestra). Supóngase, por ejemplo, que deseamos calcular $P(a \leq T \leq b)$. Para aplicar la ley de los grandes números, simplemente necesitamos obtener la frecuencia relativa del evento $\{a \leq T \leq b\}$ de nuestra muestra (grande), y luego poder tener una certeza razonable de que la frecuencia relativa se diferencia muy poco de la probabilidad teórica que se está buscando.

Hasta ahora nos hemos interesado sólo en el problema de aproximar una probabilidad exacta con una frecuencia relativa basada en un gran número de observaciones. Sin embargo, el método que hemos sugerido puede usarse para obtener soluciones aproximadas de problemas que son de naturaleza completamente no probabilística. Indicaremos sólo uno de los muchos tipos de problemas que pueden considerarse de esta manera. El planteamiento general se designa como el método de "Monte-Carlo". Una descripción muy adecuada de este método aparece en *Modern Mathematics for the Engineer*, de E. F. Beckenbach, publicado por McGraw-Hill Book Co., Inc., Nueva York, 1956, capítulo 12. El ejemplo 13.5 se obtuvo de este libro.

EJEMPLO 13.5. Supóngase que deseamos calcular la integral $\int_0^1 x\ dx$ sin recurrir a los procedimientos triviales para obtener su valor $\frac{1}{2}$. Se procede como se indica. Se obtiene, de una tabla de números aleatorios, una muestra aleatoria de la variable aleatoria distribuida uniformemente en $[0, 1]$. Supóngase que los valores muestrales son 0.69, 0.37, 0.39, 0.97, 0.66, 0.51, 0.60, 0.41, 0.76 y 0.09. Puesto que la integral requerida representa a $E(X)$, donde X es la variable aleatoria uniformemente distribuida que se muestrea, parece razonable que podamos aproximar $E(X)$ usando el promedio aritmético de los valores muestrales. Encontramos que $\overline{X} = 0.545$. (Si hubiésemos tomado una muestra mayor, tendríamos una buena razón para esperar una exactitud mayor.)

Esta ilustración trivial indica la idea básica que sustenta muchos métodos de Monte–Carlo. Estos métodos han sido usados con éxito para evaluar integrales múltiples sobre ciertas regiones complicadas y resolver algunas ecuaciones diferenciales.

Observación: Los medios para obtener muestras de una distribución arbitraria como se describió en la sección 13.5 pueden llegar a ser complicados. Debido a la gran importancia de la distribución normal, existen tablas disponibles (véase la tabla 7 en el Apéndice) que eliminan en gran parte los cálculos antes descritos. La tabla 7 proporciona, directamente, muestras de la distribución $N(0,1)$. Estos valores muestrales se llaman *desviaciones normales*. Si se necesitan n valores muestrales $x_1, \ldots, x_n$ de la distribución $N(0,1)$, se toman en forma directa de la tabla 7 (escogiendo el punto de partida de alguna manera aleatoria adecuada, como se describió para el uso de la tabla de los números aleatorios).

De una manera sencilla, también puede usarse esta tabla para obtener muestras de una distribución normal arbitraria $N(\mu, \sigma^2)$. Simplemente se multiplica x_i, el valor escogido de la tabla, por σ y luego se le suma μ. Es decir, se forma $y_i = \sigma x_i + \mu$. Entonces y_i, será un valor muestral de la distribución pedida.

PROBLEMAS

13.1. Deducir la expresión para la fdp del mínimo de una muestra. (Véase el Teorema 13.2.)

13.2. Demostrar que si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, cada una de las cuales con distribución exponencial con parámetro α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ y si $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$, entonces K tiene una distribución exponencial con parámetro $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. (Véase el Teorema 13.3.)

13.3. Supóngase que X tiene una distribución geométrica con parámetro p. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X y sea $M = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$ y $K = \text{mín}(X_1, \ldots, X_n)$. Encontrar la distribución de probabilidades de M y de K. [*Indicación:* $P(M = m) = F(m) - F(m-1)$, donde F es la fda de M.]

13.4. Se obtiene una muestra de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $N(12, 4)$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio muestral exceda 13?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el mínimo de la muestra sea menor que 10?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el máximo de la muestra exceda 15?

13.5. La duración de un artículo (en horas) está distribuida exponencialmente con parámetro $\beta = 0.001$. Se prueban seis artículos y se anotan los tiempos en que ocurren las fallas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún artículo falle antes de que hayan transcurrido 800 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún artículo dure más de 3000 horas?

13.6. Supóngase que X tiene distribución $N(0, 0.09)$. Se obtiene una muestra de tamaño 25 de X, sea $X_1, \ldots, X_{25}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $\sum_{i=1}^{25} X_i^2$ exceda 1.5?

13.7. Utilizando una tabla de números aleatorios, obtener una muestra aleatoria de tamaño 8 de una variable aleatoria que tiene las distribuciones siguientes:

a) exponencial, con parámetro 2,

b) χ-cuadrada con 7 grados de libertad,

c) $N(4, 4)$.

13.8. En la sección 13.5 se estudió un método con el cual puede generarse una muestra aleatoria de una distribución especificada. Hay muchos otros métodos con los que puede hacerse esto, algunos de los cuales pueden preferirse al mencionado, particularmente si hay instrumentos de cómputo disponibles. El siguiente es uno de dichos métodos. Supóngase que se desea obtener una muestra aleatoria de una variable aleatoria que tiene una distribución χ-cuadrada con $2k$ grados de libertad. Se procede como sigue: se obtiene una muestra aleatoria de tamaño k (con ayuda de una tabla de números aleatorios) de una variable aleatoria que está distribuida uniformemente en $(0, 1)$, sea $U_1, \ldots, U_k$. Luego se calcula $X_1 = -2 \ln(U_1 U_2 \cdots U_n) = -2 \sum_{i=1}^{k} \ln(U_i)$. La variable aleatoria X_1 tendrá entonces la distribución pedida como se indica enseguida. Luego, continuando con este esquema, se obtiene otra muestra de tamaño k de una variable aleatoria distribuida uniformemente y se encuentra así el segundo valor muestral X_2. Nótese que este procedimiento necesita k observaciones de una variable aleatoria distribuida uniformemente para cada observación de χ_{2k}^2. Para verificar la proposición que se hizo antes se procede como sigue.

a) Obtener la función generadora de momentos de la variable aleatoria $-2 \ln(U_i)$, donde U_i esté distribuida uniformemente en $(0, 1)$.

b) Obtener la función generadora de momentos de la variable aleatoria $-2 \sum_{i=1}^{k} \ln(U_i)$, donde las U_i sean variables aleatorias independientes cada una con la distribución anterior. Se compara esta fgm con la distribución χ-cuadrada y luego se obtiene la conclusión buscada.

13.9. Usando el esquema bosquejado en el problema 13.8. obtener una muestra aleatoria de tamaño 3 de la distribución χ_8^2.

13.10. Una variable aleatoria continua X está distribuida uniformemente en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Se obtiene una muestra de tamaño n de X y se calcula el promedio muestral $\overline{X}$. ¿Cuál es la desviación estándar de $\overline{X}$?

13.11. De una variable aleatoria distribuida normalmente con esperanza 20 y varianza 3 se toman muestras independientes de tamaño 10 y 15. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio de las dos muestras se diferencie (en valor absoluto) en más de 0.3?

13.12. (Para este ejercicio y los tres siguientes, leer la observación al final del capítulo 13.) Con ayuda de la tabla de las desviaciones normales (Tabla 7 del Apéndice) obtener una muestra de tamaño 30 de una variable aleatoria X que tiene una distribución $N(1, 4)$. Usar esta muestra para responder lo siguiente:

a) Comparar $P(X \geq 2)$ con la frecuencia relativa de ese evento.

b) Comparar el promedio muestral X y la varianza muestral S^2 con 1 y 4, respectivamente.

c) Construir una gráfica de $F(t) = P(X \leq t)$. Usando el mismo sistema de coordenadas, obtener la gráfica de la *función de distribución empírica* F_n definida como sigue:

$$\begin{aligned} F_n(t) &= 0 \quad \text{si} \quad t < X^{(n)} \\ &= k/n \quad \text{si} \quad X^{(k+1)} \leq t < X^{(k)} \\ &= 1 \quad \text{si} \quad t \geq X^{(1)}, \end{aligned}$$

donde $X^{(i)}$ es la i-ésima mayor observación en la muestra (es decir, $X^{(i)}$ es el estadístico de i-ésimo orden). [La función F_n se usa frecuentemente para aproximar la fda F. Puede demostrarse que en condiciones muy generales $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$.]

13.13. Tenga X una distribución $N(0, 1)$. De la tabla 7 del Apéndice obtener una muestra de tamaño 20 para esta distribución. Sea $Y = |X|$.

a) Usar esta muestra para comparar $P[1 < Y \leq 2]$ con la frecuencia relativa de ese evento.

b) Comparar $E(Y)$ con el promedio muestral $\overline{Y}$.

c) Comparar la fda de Y, $F(t) = P(Y \leq t)$, con F_n, la fda empírica de Y.

13.14. Supóngase que X tiene distribución $N(2, 9)$. Sea $X_1, \ldots, X_{20}$ una muestra aleatoria de X obtenida con ayuda de la tabla 7. Calcular

$$S^2 \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

y comparar con $E(S^2) = 9$.

13.15 Tenga X una distribución $N(0,1)$. Sea $X_1, \ldots, X_{30}$ una muestra aleatoria de X obtenida usando la tabla 7. Calcular $P(X^2 \geq 0.10)$ y comparar este valor con la frecuencia relativa de ese evento.

14

Estimación de parámetros

14.1 Introducción

En el capítulo anterior sugerimos que una muestra de una variable aleatoria X puede usarse con el propósito de estimar uno o varios parámetros (desconocidos) asociados con la distribución de probabilidades de X. En este capítulo consideraremos en detalle este problema.

A fin de desarrollar un ejemplo específico, tomemos en cuenta la situación siguiente. Un fabricante nos ha enviado 100 000 pequeños remaches. Un empalme perfectamente remachado necesita que cada remache ajuste con exactitud en un hueco y, por consiguiente, se tendrá cierta dificultad cuando el remache lo exceda. Antes de aceptar este cargamento queremos tener una idea acerca de la magnitud de p, la proporción de remaches defectuosos (es decir, los que exceden el hueco), para lo cual procedemos como sigue. Se inspeccionan n remaches del lote escogidos al azar. Debido al gran tamaño del lote, podemos suponer que escogemos con sustitución aunque realmente no procederíamos así. Se definen las siguientes variables aleatorias: $X_i = 1$, si el i-ésimo artículo es defectuoso, y 0 en cualquier otro caso $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, podemos considerar que $X_1, \ldots, X_n$ sea una muestra de

la variable aleatoria X, cuya distribución está dada por $P(X = 1 = p$, $P(X = 0) = 1 - p$.

La distribución de probabilidades de X depende del parámetro desconocido p de una manera muy sencilla. ¿Podemos usar la muestra $X_1, \ldots, X_n$ de alguna manera con el objeto de estimar el valor de p? ¿Hay algún estadístico H tal que $H(X_1, \ldots, X_n)$ pueda usarse como un estimador (puntual) de p?

Debería ser evidente que una muestra de tamaño n, donde $n < 100\ 000$, nunca puede permitirnos reconstruir la verdadera composición del cargamento, sin importar cuán hábilmente usemos la información obtenida de la muestra. En otras palabras, a no ser que inspeccionemos cada uno de los artículos (es decir, tomemos $n = 100000$), nunca podremos conocer el valor verdadero de p. (Esta última frase se refiere evidentemente al muestreo sin sustitución.)

Así, cuando proponemos a $\hat{p}$ como un estimado de p, en realidad no esperamos que $\hat{p}$ sea igual a p. (Recordemos que es una variable aleatoria y, por tanto, puede tomar muchos valores.) Este dilema da origen a dos preguntas importantes:

1) ¿Qué características queremos que posea un "buen" estimado?

2) ¿Cómo decidimos que un estimado es "mejor" que otro?

Puesto que ésta puede ser la primera vez que el lector encuentre preguntas de esta clase, vale la pena comentar brevemente la naturaleza general de este problema. Para muchas preguntas matemáticas existe una respuesta definida. Ésta puede ser muy difícil de encontrar, puesto que implica diversos problemas técnicos y podríamos tener que contentarnos con una aproximación. Con todo, normalmente es evidente cuándo tenemos una respuesta y cuándo no. (Por ejemplo, supongamos que nos piden encontrar una raíz real de la ecuación $3x^5 - 4x^2 + 13x - 7 = 0$. Una vez que hemos encontrado una solución, es muy sencillo verificar si es la correcta: sólo necesitamos sustituirla en la ecuación dada. Si tenemos dos respuestas aproximadas, r_1 y r_2, es también sencillo decidir cuál aproximación es mejor.)

Sin embargo, el problema actual, en particular la estimación de p, no admite un análisis tan sencillo. En primer lugar, puesto que nunca podemos conocer el valor verdadero de p (en cualquier situación real al menos), no tiene sentido decir que nuestro estimado $\hat{p}$ es "correcto". Segundo, si tenemos dos estimados de p, llamémoslos $\hat{p}_1$ y $\hat{p}_2$, debemos encontrar algún medio para decidir cuál es "mejor". Esto significa que debemos establecer algunos criterios que podamos aplicar para decidir si un estimado es preferible a otro.

14.2 Criterios para estimados

Definiremos ahora algunos conceptos importantes que nos ayudarán a resolver el problema antes sugerido.

Definición. Sea X una variable aleatoria con una distribución de probabilidades que depende de un parámetro desconocido θ. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de X y sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores muestrales correspondientes. Si $g(X_1, \ldots, X_n)$ es una función de la muestra que se usará para estimar θ nos referimos a g como un *estimador* de θ. El valor que toma g, es decir $g(X_1, \ldots, X_n)$, se conoce como un *estimado* de θ y habitualmente se escribe como $\hat{\theta} = g(x_1, \ldots, x_n)$. (Véase la Observación siguiente.)

Observación: En este capítulo violaremos una regla que hemos observado con mucho cuidado hasta ahora: hacer una distinción minuciosa entre una variable aleatoria y su valor. Es decir, a menudo hablaremos de $\hat{\theta}$, el estimado de θ, cuando en realidad deberíamos hablar del estimador $g(X_1, \ldots, X_n)$. También escribiremos $E(\hat{\theta})$ cuando, realmente indicamos $E[g(X_1, \ldots, X_n)]$. Sin embargo, el contexto en el cual nos permitimos esta libertad debería eliminar cualquier ambigüedad posible.

Definición. Sea $\hat{\theta}$ un estimado del parámetro desconocido θ asociado con la distribución de la variable aleatoria X. Entonces, $\hat{\theta}$ es un *estimador insesgado* (o estimado insesgado; véase la Observación anterior) para θ si $E(\hat{\theta}) = \theta$ para toda θ.

Observación: Cualquier buen estimado debería estar "cercano" al valor que está estimando. "Insesgadura" significa principalmente que el valor promedio del estimado estará cercano al valor verdadero del parámetro. Por ejemplo, si el mismo estimado se usa una y otra vez y promediamos esos valores, esperaríamos que el promedio estuviera cercano al valor verdadero del parámetro. Aunque es deseable que un estimado sea insesgado, puede haber ocasiones en las cuales podríamos preferir estimados sesgados (véase más adelante). Es posible (y realmente fácil) encontrar más de un estimado insesgado para un parámetro desconocido. A fin de hacer una buena elección en tales casos presentamos el concepto siguiente.

Definición. Sea $\hat{\theta}$ un estimado insesgado de θ. Decimos que $\hat{\theta}$ es un *estimado insesgado de varianza mínima* de θ si para todos los estimados

θ^* tales que $E(\theta^*) = 0$, tenemos $V(\hat{\theta}) \leq V(\theta^*)$ para cualquier θ. Es decir, entre todos los estimados insesgados de θ, $\hat{\theta}$ tiene la varianza más pequeña.

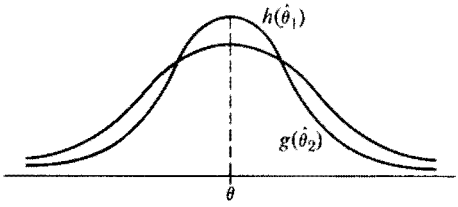


FIGURA 14.1

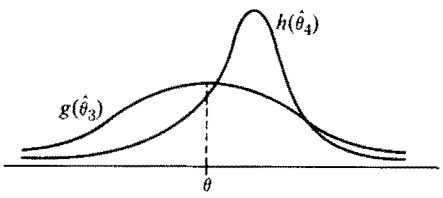


FIGURA 14.2

Observaciones: a) La varianza de una variable aleatoria mide la variabilidad de la variable aleatoria respecto a su valor esperado. Por tanto, es intuitivamente atractivo pedir que un estimado insesgado tenga una varianza pequeña, pues si la varianza es pequeña, entonces el valor de la variable aleatoria tiende a estar cerca de su promedio, lo cual, en el caso de un estimado insesgado significa aproximarse al valor verdadero del parámetro. Luego, si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son dos estimados de θ, cuya fdp está bosquejada en la figura 14.1, posiblemente preferiríamos $\hat{\theta}_1$ a $\hat{\theta}_2$. Ambos estimados son insesgados y $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$.

En el caso de los estimados $\hat{\theta}_3$ y $\hat{\theta}_4$, la decisión no es tan evidente (Fig. 14.2) ya que $\hat{\theta}_3$ es insesgada, mientras que $\hat{\theta}_4$ no lo es. Sin embargo, $V(\hat{\theta}_3) > V(\hat{\theta}_4)$. Esto significa que mientras en promedio $\hat{\theta}_3$ estará cercana a θ, su mayor varianza indica que no serían sorprendentes desviaciones considerables de θ. Por otra parte, en promedio $\hat{\theta}_4$ tendería a ser algo mayor que θ y podría estar aún más cercana a θ que $\hat{\theta}_3$, (véase la Fig. 14.2).

b) Existen técnicas generales para encontrar estimados insesgados de varianza mínima. Sin embargo, no podremos presentarlas aquí. Haremos uso de este concepto principalmente con el objeto de elegir entre dos o más estimados insesgados disponibles. Es decir, si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son estimados insesgados de θ, y si $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$, preferiríamos $\hat{\theta}_1$.

Otro criterio para discernir entre estimados es algo más difícil de formular y se basa en la siguiente definición.

Definición. Sea $\hat{\theta}$ un estimado (con base en una muestra $X_1, \ldots, X_n$) del parámetro θ. Se dice que $\hat{\theta}$ es un estimado consistente de θ, si

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| > \epsilon\right] = 0 \quad \text{para toda} \quad \epsilon > 0$$

o equivalente, si

$$\lim_{n\to\infty} \text{Prob}\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| \leq \epsilon\right] = 1 \quad \text{para toda} \quad \epsilon > 0$$

Observaciones: a) Esta definición establece que un estimado es consistente si, cuando aumenta el tamaño n de muestra el estimado θ converge en el sentido probabilístico anterior a θ. Nuevamente, ésta es una característica intuitivamente atractiva que debe poseer un estimado, pues afirma que cuando aumenta el tamaño de muestra (lo que significaría, en circunstancias muy razonables, que se dispone de más información), el estimado llega a ser "mejor" en el sentido indicado.

b) Es relativamente fácil verificar si un estimado es insesgado o no. También es muy elemental comparar las varianzas de dos estimados insesgados. Sin embargo, verificar la convergencia aplicando la definición anterior no es tan sencillo. El teorema siguiente es muy útil algunas veces.

Teorema 14.1. Sea $\hat{\theta}$ un estimado de θ con base en una muestra de tamaño n. Si $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$, y si $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$, entonces $\hat{\theta}$ es un estimado consistente de θ.

Demostración: Usaremos la desigualdad de Chebyshev, ecuación (7.20). Así, escribimos:

$$\begin{aligned} P\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| \geq \epsilon\right] &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left[\hat{\theta}-\theta\right]^2 = \frac{1}{\epsilon^2} E\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})+E(\hat{\theta})-\theta\right]^2 \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} E\Big\{\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]^2 + 2\left[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right]\left[E(\hat{\theta})-\theta\right] \\ &\quad + \left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2\Big\} \\ &= \frac{1}{\epsilon^2}\left\{\text{Var}\,\hat{\theta} + 0 + \left[E(\hat{\theta})-\theta\right]^2\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, haciendo que $n \to \infty$ y utilizando la hipótesis del teorema, encontramos que $\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta}-\theta\right| \geq \epsilon\right] \leq 0$ y así igualamos a 0.

Observación: Si el estimado $\hat{\theta}$ es insesgado, la primera condición se satisface automáticamente.

Un criterio final que se aplica a menudo a estimados puede formularse como sigue. Suponer que $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra de X y θ es un parámetro desconocido. Sea $\hat{\theta}$ una función de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Definición. Decimos que $\hat{\theta}$ *es el mejor estimado lineal insesgado* de θ si:
a) $E(\hat{\theta}) = \theta$.
b) $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$. Es decir, $\hat{\theta}$ es una función *lineal* de la muestra.
c) $V(\hat{\theta}) \leq V(\theta^*)$ donde θ^* es cualquier otro estimado de θ que satisface las relaciones *a*) y *b*) anteriores.

Posteriormente consideraremos un método muy general que nos dará buenos estimados para un gran número de problemas, dado que satisfarán uno o más de los criterios anteriores. Antes de hacer esto, consideraremos sencillamente algunos estimados que de manera intuitiva son muy razonables, y luego verificaremos, mediante los criterios anteriores cuán buenos o cuán malos son.

14.3 Algunos ejemplos

Los criterios anteriores de insesgadura, varianza mínima, consistencia y linealilidad nos dan al menos una pauta para juzgar un estimado. Consideremos ahora algunos ejemplos.

EJEMPLO 14.1. Reconsideremos el problema anterior. Hemos muestreado n remaches y encontrado que la muestra $(X_1, \ldots, X_n)$ produce exactamente k defectuosos; es decir, $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i = k$. Debido a nuestras hipótesis, Y es una variable aleatoria distribuida binomialmente.

El estimado intuitivamente más sugestivo del parámetro p es $\hat{p} = Y/n$, la proporción de defectuosos encontrados en la muestra. Apliquemos algunos de los criterios anteriores para ver cuán bueno es un estimado $\hat{p}$.

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n}(np) = p.$$

Así, $\hat{p}$ es un estimado insesgado de p.

$$V(\hat{p}) = V\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(np)(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Luego $V(p) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $\hat{p}$ es un estimado consistente. Como señalamos antes, puede haber muchos estimados insesgados para un parámetro, algunos de los cuales, además, pueden ser muy malos. Por ejemplo, considérese, en el contexto del presente caso, el estimado p^* definido como sigue: $p^* = 1$ si el primer artículo elegido es defectuoso, y 0 en cualquier otro caso. Es decir, es evidente que no es muy buen estimado cuando observamos que su valor es una función sólo de X_1, en vez de $X_1, \ldots, X_n$. Sin embargo, $p*$ es insesgado porque $E(p*) = 1P(X = 1) + OP(X = 0) = p$. La varianza de $p*$ es $p(1 - p)$, la que se compara muy mal con la varianza de p antes considerada, esto es $p(1 - p)/n$, en especial si n es grande.

El resultado obtenido en el ejemplo anterior es un caso especial de la siguiente proposición general.

Teorema 14.2. Sea X una variable aleatoria con esperanza finita μ y varianza σ^2. Sea $\overline{X}$ el promedio muestral obtenido en una muestra de tamaño n. Por lo tanto, $\overline{X}$ es un estimado insesgado y consistente de μ.

Demostración: Ésta se deduce inmediatamente del teorema 13.1, donde demostramos que $E(\overline{X}) = \mu$ y $V(\overline{X}) = \sigma^2/n$ que tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

Observación: Que el resultado demostrado en el ejemplo 14.1 es un caso especial del teorema 14.2, se deduce cuando observamos que la proporción de defectuosos en la muestra, Y/n, puede escribirse como $(1/n)(X_1 + \cdots + X_n)$, donde las X_1 toman los valores uno y cero, según que el artículo inspeccionado sea o no defectuoso.

El promedio muestral citado en el teorema 14.2 es una función lineal de la muestra. Es decir, es de la forma $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$, con $a_1 = \cdots = a_n = 1/n$. Fácilmente se observa que $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$ es un estimado insesgado de μ para cualquier elección de los coeficientes que satisfacen la condición $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Surge la siguiente pregunta interesante. ¿Para qué elección de las a_i (sujetas a $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$) es más pequeña la varianza de $\sum_{i=1}^{n} a_iX_i$? Resulta que la varianza es minimizada si $a_i = 1/n$ para toda i. Es decir, $\overline{X}$ es el estimado lineal insesgado de varianza mínima.

Para verificar esto, consideremos

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Luego,

$$\text{Var } \hat{\mu} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

puesto que las X_i son variables aleatorias independientes con varianza común σ^2. Escribimos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = (a_1 - 1/n)^2 + \cdots + (a_n - 1/n)^2 + (2/n)(a_1 + \cdots + a_n) - n(1/n^2)$$

$$= (a_1 - 1/n)^2 + \cdots + (a_n - 1/n)^2 + 1/n \left(\text{puesto que } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right).$$

Por lo tanto, esta expresión es minimizada obviamente si $a_i = 1/n$ para toda i.

EJEMPLO 14.2. Supóngase que T, el tiempo para que ocurra una falla de un componente, está distribuida exponencialmente. Es decir, la fdp de T está dada por $f(t) = \beta e^{-\beta t}$, $t \geq 0$. Supóngase que probamos n componentes, anotando el momento en que falla cada uno, digamos $T_1, \ldots, T_n$. Deseamos un estimado insesgado del tiempo esperado para que ocurra la falla $E(T) = 1/\beta$, con base en la muestra $(T_1, \ldots, T_n)$. Uno de tales estimados es $T = (1/n) \sum_{i=1}^{n} T_i$. Del teorema 14.2 sabemos que $E(T) = 1/\beta$. Puesto que $V(T) = 1/\beta^2$, el teorema 13.1 nos afirma que $V(\overline{T}) = 1/\beta^2 n$. Sin embargo, $\overline{T}$ no es el único estimado insesgado de $1/\beta$. Consideremos, en efecto, el mínimo de la muestra, $Z = \text{mín}(T_1, \ldots, T_n)$. De acuerdo con el teorema 13.3, de nuevo Z está distribuida exponencialmente con parámetro $n\beta$. Luego, el estimado nZ también es un estimado insesgado de $1/\beta$.

Para evaluar la varianza calculamos

$$V(nZ) = n^2 V(Z) = n^2 \frac{1}{(n\beta)^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Así, aunque los dos estimados nZ y $\bar{T}$, son insesgados, el último tiene una varianza más pequeña y, por tanto, debería preferirse.

Sin embargo, en esta situación especial hay otra consideración que podría influir en nuestra elección entre los dos estimados sugeridos. Los n componentes podrían probarse simultáneamente. (Por ejemplo, podríamos poner n bombillas en n portalámparas y anotar el tiempo en que se queman.) Cuando usamos nZ como estimado, la prueba puede terminarse tan pronto como el primer componente falle. Al usar $\overline{T}$ como estimado debemos esperar hasta que todos los componentes hayan fallado. Es muy posible que transcurra mucho tiempo entre la primera y la última falla. Diciéndolo de manera distinta, si L es el tiempo necesario para probar lo n artículos y calculamos el estimado para $1/\beta$, entonces, usando nZ, tenemos $L = \text{mín}(T_1, \ldots, T_n)$, mientras que al usar $\overline{T}$, tenemos $L = \text{máx}(T_1, \ldots, T_n)$. Luego, si el tiempo necesario para efectuar la prueba es de cualquier efecto serio (digamos, en términos de costo), podríamos preferir el estimado con mayor varianza.

EJEMPLO 14.3. Supóngase que deseamos un estimado insesgado de la varianza σ^2 de una variable aleatoria, con base en una muestra $X_1, \ldots, X_n$.

Aunque podríamos considerar $(1/n)\sum_{i=1}^{n}(\overline{X}_i - \overline{X})^2$, resulta que este estadístico tiene un valor esperado igual a $[(n-1)/n]\sigma^2$. (Véase el Teorema 13.4.) Por lo tanto, un estimado insesgado de σ^2 se obtiene al tomar

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Observaciones: a) Aunque dividir entre $(n-1)$ en ves de n es distinto cuando n es relativamente pequeña, para una n grande la diferencia es pequeña cualquiera que sea el estimado que se use.

b) El ejemplo 14.3 ilustra una situación muy común: puede suceder que un estimado $\hat{\beta}$ de un parámetro β, sea sesgado en el sentido $E(\hat{\beta}) = k\beta$; en tal caso, consideramos simplemente al nuevo estimado $\hat{\beta}/k$, que será insesgado.

c) Puede demostrarse, aunque no lo haremos aquí, que el estimado anterior de σ^2 es consistente.

EJEMPLO 14.4. En la tabla 14.1 reproducimos los datos obtenidos en el famoso experimento realizado por Rutherford [Rutherford

y Geiger, *Phil. Mag.* S6, 20, 698 (1910)] sobre la emisión de partículas α por una fuente radiactiva. En la tabla, k es el número de partículas

TABLA 14.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Total
n_k	57	203	383	525	532	408	273	139	49	27	10	6	2612

observadas en una unidad de tiempo (unidad = $\frac{1}{8}$ minuto), mientras que n_k es el número de intervalos en los que k partículas fueron observadas. Si hacemos que X sea el número de partículas emitidas durante el intervalo de tiempo de $\frac{1}{8}$ (minuto) de duración, y suponemos que X sigue la distribución de Poisson, tenemos

$$P(X = k) = \frac{e^{-(1/8)\lambda}(\frac{1}{8}\lambda)^k}{k!}.$$

Puesto que $E(\overline{X}) = \frac{1}{8}\lambda$, podemos usar el promedio muestral para obtener un estimado insesgado de $\frac{1}{8}\lambda$. Para λ, obtenemos entonces el estimado $\hat{\lambda} = 8\overline{X}$.

Para calcular X, simplemente evaluamos

$$\frac{\sum_{k=0}^{11} k n_k}{\sum_{k=0}^{11} n_k} = 3.87 \text{ partículas.}$$

Por tanto, un estimado insesgado de λ con base en el promedio muestral es igual a 30.96 (que puede interpretarse como el número esperado de partículas emitidas por minuto).

EJEMPLO 14.5. En la fabricación de explosivos puede ocurrir cierto número de inflamaciones al azar. Sea X el número de inflamaciones por día, suponiendo que X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. La tabla 14.2 da algunos datos que se van a emplear para la estimación de λ.

TABLA 14.2

Número de inflamaciones, k	0	1	2	3	4	5	6	Total
Número de días con k inflamaciones, n_k	75	90	54	22	6	2	1	250

Usando nuevamente el promedio muestral para el estimado de λ, obtenemos

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_k k n_k}{\sum_k n_k} = 1.22 \text{ número de inflamaciones por día.}$$

EJEMPLO 14.6. Se ha establecido que el contenido de ceniza en el carbón está distribuido normalmente con parámetros μ y σ^2. Los datos de la tabla 14.3 representan el contenido de ceniza en 250 muestras de carbón analizadas. [Datos obtenidos de E. S. Grummel y A. C. Dunningham (1930); *British Standards Institution* 403, 17.] n_x es el número de muestras que tienen un porcentaje x de ceniza.

A fin de calcular los parámetros μ y σ^2, usaremos los estimados insesgados presentados antes:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_x x n_x}{250} = 16.998, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{249} \sum_x n_x (x - \hat{\mu})^2 = 7.1.$$

TABLA 14.3

Contenido de ceniza en el carbón										
x	9.25	9.75	10.25	10.75	11.25	11.75	12.25	12.75	13.25	13.75
n_x	1	0	2	1	1	2	5	4	7	6
x	14.25	14.75	15.25	15.75	16.25	16.75	17.25	17.75	18.25	18.75
n_x	13	14	15	13	24	15	19	23	22	12
x	19.25	19.75	20.25	20.75	21.25	21.75	22.25	22.75	23.25	23.75
n_x	12	7	6	8	6	4	2	2	0	3
x	24.25	24.75	25.25							
n_x	0	0	1							
Total de muestras	250									

Observación: Supóngase que tenemos un estimado insesgado $\hat{\theta}$, digamos, de un parámetro θ. Puede suceder que estemos interesados sólo en estimar una función $g(\theta)$ de θ. [Por ejemplo, si X está distribuida exponencialmente con parámetro θ, posiblemente estaremos interesados en $1/\theta$, es decir, $E(X)$]. Debería suponerse que todo lo que necesitamos hacer es considerar $1/\hat{\theta}$ o $(\hat{\theta})^2$, por ejemplo, como el estimado insesgado apropiado de $1/\theta$ o $(\theta)^2$. Categóricamente esto no es así. En realidad, una de las desventajas del criterio de insesgadura es que si hemos encontrado un estimado insesgado de θ, en general debemos partir del principio para encontrar un estimado para $g(\theta)$. Sólo si $g(\theta) = a\theta + b$, es

decir, si g es una función lineal de θ, es cierto que $E[g(\hat{\theta})] = g[E(\hat{\theta})]$. En general, $E[g(\hat{\theta})] \neq g[E(\hat{\theta})]$. Supóngase, por ejemplo, que X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$. Hemos visto que el promedio muestral $\overline{X}$ es un estimado de insesgado de μ. ¿Es $\overline{X}^2$ un estimado insesgado de $(\mu)^2$? La respuesta es "no", como lo indica el cálculo siguiente. Puesto que $V(\overline{X}) = E(\overline{X})^2 - (E(\overline{X}))^2$, tenemos

$$E(\overline{X})^2 = V(\overline{X}) + (E(\overline{X}))^2 = \sigma^2/n + (\mu)^2 \neq (\mu)^2.$$

Aunque los ejemplos anteriores demuestran en forma convincente que en general

$$E[g(\hat{\theta})] \neq g[E(\hat{\theta})],$$

resulta que en muchos casos la igualdad es válida, aproximadamente al menos, en especial si el tamaño de muestra es grande. Así, en el ejemplo anterior encontramos que $E(\overline{X}) = \mu$ y $E(\overline{X})^2 = \mu^2 + \sigma^2/n$, [con $\hat{\theta} = \overline{X}$ y $g(z) = z^2$], que es aproximadamente igual a μ^2 si n es grande.

14.4 Estimados de máxima verosimilitud

Sólo hemos considerado ciertos criterios con los cuales podemos juzgar un estimado. Es decir, dado un estimado propuesto para un parámetro desconocido, podemos verificar si es insesgado y consistente, y podemos calcular (al menos en principio) su varianza y compararla con la varianza de otro estimado. Sin embargo, no tenemos aún un procedimiento general con el cual podamos encontrar estimados "razonables". Existen diversos procedimientos de los cuales expondremos uno, llamado el método de la máxima verosimilitud. En muchos casos este método da estimados razonables.

A fin de evitar la repetición de nuestra exposición para el caso discreto y el continuo, convengamos en la terminología siguiente para los propósitos de la exposición presente.

Escribiremos $f(x; \theta)$ tanto para la fdp de X (evaluada en x) como para $P(X = x)$ si X es discreta. Incluimos θ (en la notación) para recordar que la distribución de probabilidades de X depende del parámetro θ en el cual estamos interesados.

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la variable aleatoria X y sean $x_1, \ldots, x_n$ los valores muestrales. Definamos la *función de verosimilitud* L como la siguiente función de la muestra y de θ.

$$L(X_1,\ldots,X_n;\theta) = f(X_1;\theta)f(X_2;\theta)\cdots f(X_n;\theta). \tag{14.1}$$

Si X es discreta, $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$ representa $p[X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n]$, mientras que si X es continua, $L(x_1,\ldots,X_n;\theta)$ representa la fdp conjunta de $(X_1,\ldots,X_n)$.

Si se ha obtenido la muestra $(X_1,\ldots,X_n)$, los valores muestrales $(x_1,\ldots,x_n)$ son conocidos. Puesto que θ es desconocida, podríamos hacernos la siguiente pregunta. ¿Para qué valor de θ será mayor $L(x_1,\ldots,x_n;\theta)$? En otras palabras, supongamos que tenemos dos valores de θ, sean θ_1 y θ_2 y que $L(x_1,\ldots,x_n;\theta_1) < L(x_1,\ldots,x_n;\theta_2)$. Preferiríamos entonces θ_2 a θ_1 para los valores muestrales *dados* $(x_1,\ldots,x_n)$. Porque si θ_2 es realmente el valor verdadero de θ, entonces la probabilidad de obtener valores muestrales como los que teníamos es mayor que si θ_1 fuese el valor verdadero de θ. Informalmente, preferimos el valor del parámetro que hace tan probable como sea posible ese evento que en realidad ocurrió. Es decir, deseamos elegir el valor más probable de θ *después* de obtener los datos, suponiendo que cada valor de θ fuese igualmente posible *antes* que los datos fuesen obtenidos. Hagamos la siguiente definición formal.

Definición. El estimado de *máxima verosimilitud* de θ, digamos $\hat{\theta}$, con base en una muestra aleatoria $X_1,\ldots,X_n$, es el valor de θ que maximiza a $L(X_1,\ldots,X_n;\theta)$, considerado como una función de θ para una muestra dada $X_1,\ldots,X_n$, donde L está definida por la ecuación (14.1). (Éste habitualmente se designa como el estimado ML.)

Observaciones: a) Por supuesto, $\hat{\theta}$ será un estadístico y, por tanto, una variable aleatoria, puesto que su valor dependerá de la muestra $(X_1,\ldots,X_n)$. (No consideraremos como solución una constante.)

b) En la mayor parte de nuestros ejemplos, θ representará un solo número real. Sin embargo, puede suceder que la distribución de probabilidades de X dependa de dos o más valores paramétricos (como se hace en la distribución normal, por ejemplo). En tal caso, θ puede representar un vector, $\theta = (\alpha,\beta)$ o $\theta = (\alpha,\beta,\gamma)$, etc.

c) A fin de encontrar el estimado ML debemos determinar el valor máximo de una función. Por lo tanto, en muchos problemas podemos aplicar algunas de las técnicas estándar del cálculo para encontrar este máximo. Puesto que $\ln x$ es una función *creciente* de x,

$$\ln L(X_1,\ldots,X_n;\theta)$$

obtendrá su valor máximo para el mismo valor de θ como lo hará $L(X_1, \ldots, X_n; \theta)$. Luego, en condiciones muy generales, suponiendo que θ es un número real y que $L(X_1, \ldots, X_n; \theta)$es una función diferenciable de θ, podemos obtener el estimado ML $\hat{\theta}$ al resolver lo que se conoce como la *ecuación de verosimilitud*:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, \ldots, X_n; \theta) = 0 \tag{14.2}$$

Si $\theta = (\alpha, \beta)$, la ecuación anterior debe sustituirse por las ecuaciones de verosimilitud simultáneas

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L(X_1, \ldots, X_n; \alpha, \beta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(X_1, \ldots, X_n; \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Nuevamente se insistirá en que el planteamiento anterior no siempre es útil. Sin embargo, en un gran número de ejemplos importantes (algunos de los cuales presentaremos en forma breve) este método proporciona el estimado *ML*, pedido con relativa facilidad.

Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud:

a) El estimado ML puede ser sesgado. Muy a menudo tal sesgo puede evitarse multiplicando por una constante apropiada.

b) En condiciones muy generales, los estimados ML son consistentes. Es decir, si los tamaños de muestra en los cuales se basan es grande, el estimado ML estará "cercano" al valor del parámetro que se estima. (Los estimados ML poseen otra propiedad muy importante, la propiedad del "gran tamaño de muestra" que se expondrá más adelante.)

c) Los estimados ML poseen la notable *propiedad de invarianza*. Supóngase que $\hat{\theta}$ es el estimado ML de θ. Entonces puede demostrarse que el estimado ML de $g(\theta)$ es $g(\hat{\theta})$. Es decir, si el estadístico A toma sus medidas en pies^2 y el estadístico B mide en pies y si el estimado ML de A es $\hat{\theta}$, entonces el de B sería $\sqrt{\hat{\theta}}$. Recordemos que esta propiedad no la tienen los estimados insesgados.

Consideraremos ahora ciertas aplicaciones sobresalientes de los estimados ML.

EJEMPLO 14.7. Supóngase que el tiempo para que ocurra la falla, digamos T, de un componente tiene una distribución exponencial con parámetro β. La fdp de T, por lo tanto, está dada por

$$f(t) = \beta e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Supóngase que se prueban n de tales componentes, dando los tiempos de falla $T_1, \ldots, T_n$. Por lo tanto, la función de verosimilitud de esta muestra está dada por

$$L(T_1, \ldots, T_n; \beta) = \beta^n \exp\left(-\beta \sum_{i=1}^{n} T_i\right).$$

Así, $\ln L = n \ln \beta - \beta \sum_{i=1}^{n} T_i$. Por tanto,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} T_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0$$

da $\hat{\beta} = 1/\overline{T}$, donde $\overline{T}$ es el promedio muestral de los tiempos para que suceda la falla. Puesto que el valor esperado de T, el tiempo promedio para que ocurra la falla, está dada por $1/\beta$, usando la propiedad de invarianza de los estimados ML, encontramos que el estimado ML de $E(T)$ está dado por $\overline{T}$, el promedio muestral. Sabemos que $E(\overline{T}) = 1/\beta$ y, por tanto $\overline{T}$, el estimado ML de $E(T)$, es insesgado.

Observación: En general, no es fácil encontrar la distribución de probabilidades de los estimados ML, especialmente si el tamaño de muestra es pequeño. (Si n es grande, encontraremos que es posible una solución general.) Sin embargo, en el presente ejemplo podemos obtener la distribución de los estimados ML. Del corolario del teorema 10.9 encontramos que $2n\beta\overline{T}$ tiene distribución χ^2_{2n}. Luego, $P(\overline{T} \leq t) = P(2n\beta\overline{T} \leq 2n\beta t)$. Esta probabilidad se puede obtener directamente de la tabla de la distribución χ-cuadrada si n, β y t son conocidas.

EJEMPLO 14.8. Se sabe que cierta proporción (fija), digamos p, de detonantes es defectuosa. De una gran partida, se eligen n al azar y se prueban. Definamos las variables aleatorias siguientes.

X_i =si el i-ésimo detonante es defectuoso y 0 en cualquier otro caso, $i = 1, 2, \ldots, n$

Por tanto, $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de la variable aleatoria X que tiene la distribución de probabilidades $P(X = 0) = f(0;p) = 1-p$, $P(X = 1) = f(1;p) = p$. Es decir, $f(x,p) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x = 0, 1$. Luego,

$$L(X_1, \ldots, X_n; p) = p^k(1-p)^{n-k},$$

donde $k = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = número total de detonantes defectuosos. Así, $\ln L(X_1, \ldots, X_n; p) = k \ln p + (n-k)\ln(1-p)$. Por tanto,

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{k}{p} + \frac{n-k}{1-p}(-1) = \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p}.$$

Si $k = 0$ o n encontramos directamente, al considerar la expresión de L, que el valor máximo de L se obtiene cuando $p = 0$ o 1, respectivamente. Para $k \neq 0$ o n, hacemos $\partial \ln L/\partial p = 0$ y encontramos como solución $\hat{p} = k/n = \overline{X}$, el promedio muestral. Así, nuevamente encontramos que el estimado ML da un estimado insesgado del parámetro buscado.

EJEMPLO 14.9. Supóngase que la variable aleatoria X está distribuida normalmente con esperanza μ y varianza 1. Es decir, la fdp de X está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)(x-\mu)^2}.$$

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria de X, la función de verosimilitud de la muestra es

$$L(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right].$$

Por lo tanto,

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu).$$

Luego, $\partial \ln L/\partial \mu = 0$ da $\hat{\mu} = \overline{X}$, el promedio muestral.

EJEMPLO 14.10. Hasta ahora hemos considerado situaciones en las cuales pudimos encontrar el valor máximo de L al derivar simplemente $L($ o $\ln L)$ respecto al parámetro y hacer esta derivada igual a cero. El ejemplo siguiente ilustra que esto no siempre es efectivo.

Supóngase que la variable aleatoria X está distribuida uniformemente en el intervalo $[0, \alpha]$, donde α es un parámetro desconocido. La fdp de X está dada por

$$f(x) = 1/\alpha, \quad 0 \leq x \leq \alpha,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra de X, su función de verosimilitud está dada por

$$L(X_1, \ldots, X_n; \alpha) = (1/\alpha)^n, \quad 0 \leq X_i \leq \alpha \text{ para toda } i,$$
$$= 0 \quad \text{para cualquier otro valor.}$$

Considerando L como una función de α para $(X_1, \ldots, X_n)$ dada, se observa que debemos tener $\alpha \geq X_i$ para toda i a fin de que L sea distinta de cero. Esto equivale a pedir que $\alpha \geq \text{máx}(X_1, \ldots, X_n)$. Así, si dibujamos L como una función de α obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 14.3. De esta gráfica, es evidente de inmediato qué valor de α maximiza L, es decir

$$\hat{\alpha} = \text{máx}(X_1, \ldots, X_n).$$

Estudiemos algunas propiedades de este estimado. Del teorema 13.2 obtenemos la fdp de $\hat{\alpha}$: $g(\hat{\alpha}) = n[F(\hat{\alpha})]^{n-1} f(\hat{\alpha})$.Pero $F(x) = x/\alpha$, $0 \leq x \leq \alpha$ y $f(x)$ están dadas anteriormente. Luego, obtenemos

$$g(\hat{\alpha}) = n\left[\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right]^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{n(\hat{\alpha})^{n-1}}{\alpha^n}, \quad 0 \leq \hat{\alpha} \leq \alpha.$$

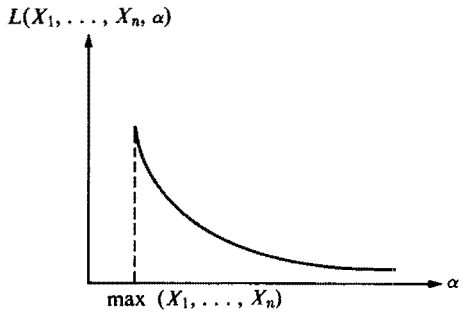


FIGURA 14.3

Para encontrar $E(\hat{\alpha})$ calculamos

$$E(\hat{\hat{\alpha}}) = \int_0^{\alpha} \hat{\alpha} g(\hat{\alpha})\, d\hat{\alpha} = \int_0^{\alpha} \hat{\alpha} \frac{n\hat{\alpha}^{n-1}}{\alpha^n}\, d\hat{\alpha}$$
$$= \frac{n}{\alpha^n} \frac{\hat{\alpha}^{n+1}}{n+1}\Big|_0^{\alpha} = \frac{n}{n+1}\alpha.$$

Así, $\hat{\alpha}$ no es un estimado insesgado de α; $\hat{\alpha}$ tiende a "subestimar" α. Si queremos un estimado insesgado, podemos usar

$$\hat{\hat{\alpha}} = \frac{n+1}{n} \text{máx}(X_1, \ldots, X_n).$$

Observemos que aunque $E(\hat{\alpha}) \neq \alpha$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\alpha}) = \alpha$. Así, para verificar la consistencia debemos demostrar aún que $V(\hat{\alpha}) \to 0$ cuando $n \to \infty$. (Véase el Teorema 14.1.) Debemos calcular $E(\hat{\alpha})^2$:

$$E(\hat{\alpha})^2 = \int_0^{\alpha} (\hat{\alpha})^2 g(\hat{\alpha})\, d\hat{\alpha} = \int_0^{\alpha} (\hat{\alpha})^2 \frac{n(\hat{\alpha})^{n-1}}{\alpha^n}\, d\hat{\alpha}$$
$$= \frac{n}{\alpha^n} \frac{(\hat{\alpha})^{n+2}}{n+2}\Big|_0^{\alpha} = \frac{n}{n+2}\alpha^2.$$

Luego,

$$V(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha})^2 - (E(\hat{\alpha}))^2 = \frac{n}{n+2}\alpha^2 - \left[\frac{n}{n+1}\alpha\right]^2 = \alpha^2 \left[\frac{n}{(n+2)(n+1)^2}\right].$$

Así, $V(\hat{\alpha}) \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por tanto, la consistencia está demostrada.

EJEMPLO 14.11. Consideremos un ejemplo en el cual los dos parámetros (ambos desconocidos) caracterizan la distribución. Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Por tanto, la fdp de X es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right).$$

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra de X, su función de verosimilitud está dada por

$$L(X_1,\ldots,X_n;\mu,\sigma) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right]^2\right\}.$$

Luego,

$$\ln L = \left(-\frac{n}{2}\right)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2.$$

Debemos resolver simultáneamente

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0.$$

Tenemos

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)}{\sigma^2} = 0,$$

lo que da $\hat{\mu} = \overline{X}$, el promedio muestral. Y

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0,$$

que da

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

Obsérvese que el método ML produce un estimado sesgado de σ^2, puesto que ya hemos visto que un estimado insesgado es de la forma $1/(n-1)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

EJEMPLO 14.12. Anteriormente consideramos (Ej. 14.7) el problema de estimar el parámetro β en una ley exponencial de falla, al probar n artículos y anotar sus tiempos de falla, $T_1,\ldots,T_n$. Otro método podría ser el siguiente. Supóngase que sacamos n artículos, los probamos, y después que ha transcurrido cierto tiempo, digamos T_0 horas, simplemente contamos el número de artículos que han fallado, digamos X.

Nuestra muestra consiste en $X_1, \ldots, X_n$, donde $X_i = 1$ si el i-ésimo artículo ha fallado en el periodo especificado, y 0 en cualquier otro caso. Luego, la función de verosimilitud de la muestra es

$$L(X_1, \ldots, X_n; \beta) = p^k(1-p)^{n-k},$$

donde $k = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = número de artículos que han fallado y p = Prob (el artículo falla). Ahora p es una función del parámetro que se está estimando; es decir,

$$p = P(T \leq T_0) = 1 - e^{-\beta T_0}.$$

Utilizando el resultado del ejemplo 14.8, encontramos que el estimado ML de p es $\hat{p} = k/n$. Aplicando la propiedad de invarianza del estimado ML (observando que p es una función creciente de β), obtenemos el estimado ML de β simplemente al resolver la ecuación $1 - e^{-\beta T_0} = k/n$. Un cálculo fácil da

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{T_o} \ln\left(\frac{n-k}{n}\right),$$

o, para el estimado de $1/\beta$, el tiempo promedio para que ocurra la falla,

$$\left(\frac{\hat{1}}{\beta}\right) = \frac{-T_0}{\ln[(n-k)/n]}.$$

En todos los ejemplos antes presentados, el método ML da ecuaciones que eran relativamente sencillas de resolver. Este no es el caso en muchos problemas y a menudo debemos recurrir a métodos numéricos (aproximados) a fin de obtener los estimados. El ejemplo siguiente ilustra tales dificultades.

EJEMPLO 14.13. Como ya lo observamos, la distribución gama tiene aplicaciones importantes para probar la duración. Supóngase por ejemplo que el tiempo para que ocurra una falla de un generador eléctrico tiene una duración X, cuya fdp está dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1}}{\Gamma(r)} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

donde r y λ son dos parámetros positivos que deseamos estimar. Supóngase que es posible una muestra $(X_1, \ldots, X_n)$ de X. (Es decir, se han probado n generadores y se ha anotado los tiempos en que se produce su falla.) La función de verosimilitud de la muestra es

$$L(X_1, \cdots, X_n; \lambda, r) = \frac{(\lambda)^{nr}(\Pi_{i=1}^n X_i)^{r-1} \exp(-\lambda \sum_{i=1}^n X_i)}{[\Gamma(r)]^n},$$

$$\ln L = nr \ln \lambda + (r-1) \sum_{i=1}^n \ln X_i - \lambda \sum_{i=1}^n X_i - n \ln \Gamma(r).$$

Así, debemos resolver simultáneamente $\partial \ln L/\partial \lambda = 0$ y $\partial \ln L/\partial r = 0$. Estas ecuaciones se convierten en

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{nr}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial r} = n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln X_i - n \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} = 0.$$

Luego, $\partial \ln L/\partial \lambda = 0$ da directamente $\hat{\lambda} = r/\overline{X}$. Por tanto, después de sustituir λ por $\hat{\lambda}$, encontramos que $\partial \ln L/\partial r = 0$ da

$$\ln r - \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)} = \ln \overline{X} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i.$$

Es evidente que debemos resolver la ecuación anterior para r, obteniendo $\hat{r}$ y entonces $\hat{\lambda} = \hat{r}/\overline{X}$. Afortunadamente se ha tabulado la función $\Gamma'(r)/\Gamma(r)$. Un método muy rápido para obtener las soluciones pedidas, se presenta en el estudio de D. G. Chapman (*Annals of Mathematical Statistics*, 27, 498–506, 1956). Este ejemplo muestra que la solución de las ecuaciones de verosimilitud puede conducir a dificultades matemáticas considerables.

Como antes mencionamos, los estimados ML poseen una propiedad adicional que los hace muy apreciados, especialmente si los estimados se basan en una muestra muy grande.

Propiedad asintótica de los estimados de máxima verosimilitud. Si $\hat{\theta}$ es un estimado ML para el parámetro θ, definido sobre una muestra

aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una variable aleatoria X, entonces para n suficientemente grande, la variable aleatoria $\hat{\theta}$ tiene aproximadamente la distribución

$$N\left(\theta, \frac{1}{B}\right), \quad \text{donde} \quad B = nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X;\theta)\right]^2; \tag{14.4}$$

aquí f es la función de probabilidad puntual o fdp de X, dependiendo de si X es discreta o continua y donde θ se supone que es un número real.

Observaciones: a) La propiedad anterior, por cierto, es mucho más fuerte que la propiedad de consistencia que hemos mencionado antes. La consistencia expresa que si n es suficientemente grande, $\hat{\theta}$ estará "cercana" a θ. Ahora, esa propiedad nos describe cuál es el comportamiento probabilístico de $\hat{\theta}$ para una n grande.

b) No demostraremos esta afirmación, sólo ilustraremos su uso con un ejemplo.

EJEMPLO 14.14. Reconsideremos el ejemplo 14.7. Encontramos que $\hat{\beta} = 1/\overline{T}$ es el estimado ML de β. La fdp de T fue dada por $f(t;\beta) = \beta e^{-\beta t}$, $t > 0$. La propiedad anterior establece que si n es suficientemente grande, $\hat{\beta} = 1/\overline{T}$ tiene aproximadamente la distribución $N(\beta, 1/B)$, donde B está dada por la ecuación (14.4).

Para encontrar B, consideremos $\ln f(T;\beta) = \ln\beta - \beta T$. Luego,

$$\partial/\partial\beta) \ln f(T;\beta) = (1/\beta) - T.$$

Por tanto,

$$\left[\frac{\partial}{\partial\beta} \ln f(T;\beta)\right]^2 = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2T}{\beta} + T^2.$$

Puesto que

$$E(T) = 1/\beta \quad \text{y} \quad E(T^2) = V(T) + [E(T)]^2 = 1/\beta^2 + 1/\beta^2 = 2/\beta^2,$$

tenemos

$$E\left[\frac{\partial}{\partial\beta} \ln f(T;\beta)\right]^2 = \frac{1}{\beta^2} - \frac{2}{\beta}\frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$

TABLA 14.4

X (altura, m)	Y (temperatura, ° C)	X (altura, m)	Y (temperatura, ° C)
1142	13	1008	13
1742	7	208	18
280	14	439	14
437	16	1471	14
678	13	482	18
1002	11	673	13
1543	4	407	16
1002	9	1290	7
1103	5	1609	6
475	11	910	9
1049	10	1277	11
566	15	410	14
995	10		

Por lo tanto, encontramos que para una n grande $\hat{\beta}$, tiene aproximadamente la distribución $N(\beta, \beta^2/n)$. (Esto verifica la propiedad de consistencia del estimado, puesto que $\beta^2/n \to 0$ cuando $n \to \infty$.)

14.5 El método de los mínimos cuadrados

EJEMPLO 14.15. Estamos familiarizados con el hecho de que la temperatura del aire disminuye con la altitud del lugar. Los datos de la tabla 14.4 y el *diagrama de dispersión* asociado (gráfica de puntos) (Fig. 14.4) lo refuerzan. La gráfica de puntos indica no sólo que la temperatura Y disminuye con la altura X, sino que es evidente una relación lineal.

Las observaciones representan la altitud (en metros) y la temperatura (en grados centígrados) en las primeras horas de la mañana en cierto número de puestos de observación en Suiza. Los datos provienen del Observatorio Basel–St. Margarathen.

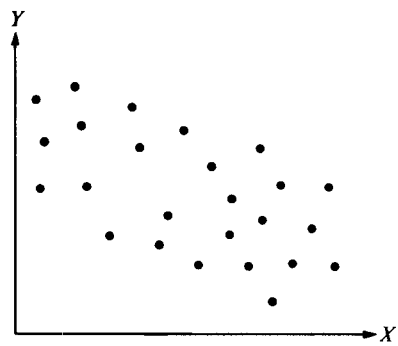


FIGURA 14.4

¿Cuál es un modelo razonable para los datos anteriores? Supondremos que Y es una variable aleatoria, cuyo valor depende, entre otras cosas, del valor de X. Supondremos, específicamente, que

$$Y = \alpha X + \beta + \epsilon,$$

donde α y β son constantes (desconocidas), X es la altitud (conocida) desde la cual se mide Y, y ϵ es una variable aleatoria. El análisis de este *modelo lineal* depende de las hipótesis que hagamos acerca de la variable aleatoria ϵ. (Esencialmente decimos que la temperatura es un resultado aleatorio, cuyo valor puede descomponerse estrictamente en una componente aleatoria más un término que depende de la altitud X de una manera lineal.) La hipótesis que haremos acerca de ϵ es la siguiente:

$$E(\epsilon) = 0; \quad V(\epsilon) = \sigma^2 \quad \text{para toda } X.$$

Es decir, el valor esperado y la varianza de ϵ no dependen del valor de X. Por lo tanto, $E(Y) = \alpha X + \beta$ y $V(Y) = \sigma^2$. Observemos que el modelo que hemos establecido depende de los tres parámetros α, β y σ^2. No podemos usar el método de la máxima verosimilitud para estimar esos parámetros a no ser que hagamos más hipótesis acerca de la distribución de ϵ. Nada se ha supuesto acerca de la distribución de la variable aleatoria ϵ; sólo se formuló una hipótesis acerca de su valor esperado y su varianza. (Posteriormente mencionaremos una modificación de este modelo.)

Antes de establecer cómo estimar los parámetros respectivos, digamos unas pocas palabras sobre el significado de una muestra aleatoria en el presente contexto. Supongamos que se escogen n valores de X, $x_1, \ldots, x_n$. (Recordemos otra vez que aquí X no es una variable aleatoria.) Para cada x_i, sea Y_i una observación independiente de la variable aleatoria Y descrita anteriormente. Por tanto, $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ puede ser considerada como una muestra aleatoria de la variable aleatoria Y para los valores $(x_1, \ldots, x_n)$ de X dados.

Definición. Supóngase que tenemos $E(Y) = \alpha X + \beta$, donde α, β y X son como antes se expresó. Sea $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de Y. Los *estimados de mínimos cuadrados* de los parámetros α y β son los valores α y β que minimizan

$$\sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2 .$$

Observación: La interpretación del criterio anterior es muy evidente. (Véase la Fig. 14.5.) Para cada par (x_i, Y_i) calculamos la discrepancia entre Y_i, el valor observado, y $\alpha x_i + \beta$, el valor esperado. Puesto que sólo estamos interesados en la magnitud de esta discrepancia, elevamos al cuadrado y sumamos todos los puntos de muestra. La línea buscada es aquella para la cual esta suma es más pequeña.

A fin de obtener los estimados pedidos para α y β procedemos como sigue. Sea $S(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} [Y_i - (\alpha x_i + \beta)]^2$. Para minimizar $S(\alpha, \beta)$ debemos resolver las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0.$$

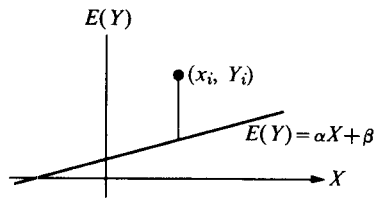


FIGURA 14.5

Derivando S respecto a α y a β, obtenemos

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} 2[Y_i - (\alpha x_i + \beta)](-x_i) = -2\sum_{i=1}^{n} \left[x_i Y_i - \alpha x_i^2 - \beta x_i\right],$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} 2[Y_i - (\alpha x_i + \beta)](-1) = -2\sum_{i=1}^{n} [Y_i - \alpha x_i - \beta].$$

Así, $\partial S/\partial \alpha = 0$ y $\partial S/\partial \beta = 0$ pueden escribirse, respectivamente, como sigue:

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \beta \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i, \tag{14.5}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i + n\beta = \sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{14.6}$$

Tenemos así dos ecuaciones *lineales* en las incógnitas α y β. La solución puede obtenerse de la manera usual, por eliminación directa o usando determinantes. Denotando las soluciones por $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, encontramos fácilmente que

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \quad \text{donde} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{14.7}$$

$$\hat{\beta} = \overline{Y} - \hat{\alpha}\overline{x}, \quad \text{donde} \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i. \tag{14.8}$$

Las soluciones anteriores son únicas y siempre se obtienen, siempre que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \neq 0.$$

Esta condición, sin embargo, se satisface cada vez que todas las x_i no son iguales.

El estimado del parámetro σ^2 no puede obtenerse por los métodos anteriores. Establezcamos simplemente que el estimado usual de σ^2, en términos de los estimados de mínimos cuadrados $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, es

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - (\hat{\alpha}x_i + \hat{\beta})\right]^2.$$

Observaciones: a) Evidentemente es $\hat{\alpha}$ una función *lineal* de los valores muestrales $Y_1, \ldots, Y_n$.

b) También β es una función lineal de $Y_1, \ldots, Y_n$, como lo indica el cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \overline{Y} - \hat{\alpha}\overline{x} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \frac{\overline{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})Y_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y_i\left[\frac{1}{n} - \overline{x}\frac{(x_i - \overline{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right].\end{aligned}$$

c) Es un ejercicio sencillo demostrar que $E(\hat{\alpha}) = \alpha$ y que $E(\hat{\beta}) = \beta$. (Véase el Prob. 14.34.) Así, $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son estimados insesgados.

d) Las varianzas de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ también se pueden calcular con facilidad. (Véase el Prob. 14.35.) Tenemos

$$V(\hat{\alpha}) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}; \quad V(\hat{\beta}) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}\right]\sigma^2 \tag{14.9}$$

e) Los estimados $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son en realidad los mejores estimados lineales insesgados de α y β. Es decir, de entre todos los estimados lineales insesgados, éstos tienen la mínima varianza. Éste es un caso especial del *teorema general de Gauss–Markoff*, el cual establece que en ciertas condiciones los estimados de mínimos cuadrados y los mejores estimados lineales insesgados son siempre los mismos.

f) El método de los mínimos cuadrados puede aplicarse a modelos no lineales. Por ejemplo, si $E(Y) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, podemos estimar α, β y γ de modo que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i - (\alpha x_i^2 + \alpha x_i + \gamma)\right]^2$$

se minimiza.

g) Si formulamos la hipótesis adicional de que la variable aleatoria ϵ tiene distribución $N(0, \sigma^2)$, podemos aplicar el método de la máxima verosimilitud para estimar los parámetros α y β. Esos estimados son los mismos que los estimados de mínimos cuadrados obtenidos anteriormente. (Esto no siempre es cierto, es una consecuencia de la hipótesis de normalidad.)

EJEMPLO 14.16. Este ejemplo es presentado por Y. V. Linnik en *Method of Least Squares and Principles of the Theory of Observations*, Pergamon Press, Nueva York, 1961. Los datos de este ejemplo fueron obtenidos por Mendeléjev y presentados en *Foundations of Chemistry*. (Véase la Tabla 14.5.) Relacionan la solubilidad de nitrato de sodio $NaNO_3$ con la temperatura del agua (en $°C$). A la temperatura indicada, las Y partes de $NaNO_3$ se disuelven en 100 partes de agua. Al hacer una gráfica con esos datos se obtiene el diagrama de dispersión que se muestra en la figura 14.6.

Este diagrama sugiere un modelo de la forma $E(Y) = bT + a$. Usando el metodo de los mínimos cuadrados bosquejado anteriormente, encontramos que $\hat{b} = 0.87$ y $\hat{a} = 67.5$.

14.6 El coeficiente de correlación

En la sección anterior nos interesamos en pares de valores (X, Y), pero, como lo hemos señalado una y otra vez, X no debe considerarse como una variable aleatoria. Sin embargo, hay variables aleatorias bidimensionales (X, Y) que dan origen a una muestra aleatoria

TABLA 14.5

T	Y	T	Y
0	66.7	29	92.9
4	71.0	36	99.4
10	76.3	51	113.6
15	80.6	68	125.1
21	85.7		

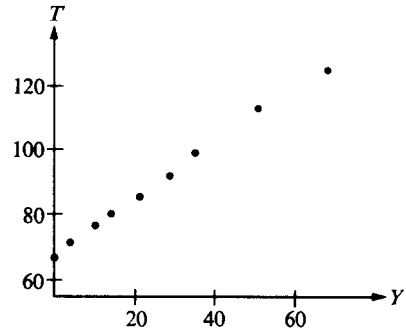


FIGURA 14.6

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$. Uno de los parámetros más importantes asociado con una variable aleatoria bidimensional es el coeficiente de correlación ρ_{xy}.

TABLA 14.6

X (velocidad, km/seg)	11.93	11.81	11.48	10.49	10.13	8.87
Y (altura, km)	62.56	57.78	53.10	48.61	44.38	40.57

El estimado que se acostumbra usar para ρ es el *coeficiente de correlación muestral*, definido como sigue:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

Nótese que para propósitos de cálculo es más fácil evaluar r como sigue:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2}}.$$

EJEMPLO 14.17. Los datos anotados en la tabla 14.6 representan la velocidad (en km/seg) y la altura (en km) de la estrella fugaz número 1242 como se informó en la "Smithsonian Contributions to Astrophysics" en el *Proccedings of the Symposium on Astronomy and Physics of Meteors*, Cambridge, Mass., 28 de agosto – 1o. de septiembre de 1961. Un cálculo directo da $r = 0.94$.

14.7 Intervalos de confianza

Hasta ahora sólo nos hemos interesado en la obtención de un estimado puntual para un parámetro desconocido. Como se sugirió al principio de esté capítulo, existe otro planteamiento que a menudo conduce a resultados muy significativos.

Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 se supone conocida, mientras que μ es el parámetro desconocido. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X y $\overline{X}$ el promedio muestral.

Sabemos que $\overline{X}$ tiene distribución $N(\mu, \sigma^2/n)$. Por tanto, $Z = [(\overline{X} - \mu)/\sigma]\sqrt{n}$ tiene una distribución $N(0, 1.)$ Nótese que aunque Z depende de μ, su distribución de probabilidades no. Podemos usar este hecho a nuestra conveniencia como sigue.

Considerar

$$
\begin{aligned}
2\Phi(z) - 1 &= P\left(-z \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq z\right) \\
&= P\left(-\frac{z\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X} \leq -\mu \leq +\frac{z\sigma}{\sqrt{n}} - \overline{X}\right) \\
&= P\left(\overline{X} - \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}
$$

Esta última proposición probabilística debe interpretarse *muy cuidadosamente*. *No* significa que la probabilidad del parámetro μ que cae en el intervalo mencionado sea igual a $2\Phi(z) - 1$; μ es un parámetro y está o no en el intervalo anterior. En su lugar, lo anterior debería interpretarse como sigue: $2\Phi(z) - 1$ es igual a la probabilidad que el intervalo aleatorio $(\overline{X} - z\sigma/\sqrt{n}, \overline{X} + z\sigma/\sqrt{n})$ contenga a μ. A tal intervalo se le llama *intervalo de confianza* para el parámetro μ. Puesto que z queda a nuestro criterio, podemos elegirlo de modo que la probabilidad anterior sea igual a $1 - \alpha$. Por tanto, z está definida por la relación $\Phi(z) = 1 - \alpha/2$. Ese valor de z, denotado con $K_{1-\alpha/2}$, se puede obtener de las tablas de la distribución normal. (Véase también la Fig. 14.7.) Es decir, tenemos $\Phi(K_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$.

Para resumir: el intervalo $(\overline{X} - n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2}, \overline{X} + n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2})$ es un intervalo de confianza para el parámetro μ con *coeficiente de confianza* $(1 - \alpha)$, o un $(1 - \alpha)$ 100% de intervalo de confianza.

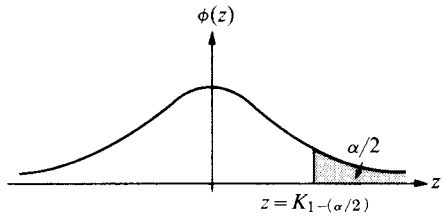


FIGURA 14.7

Supóngase que X representa la duración de una pieza de un equipo. Supóngase que se probaron 100 piezas que tuvieron una duración promedio de $\overline{X} = 501.2$ horas. Se sabe que σ es de cuatro horas y que deseamos tener un intervalo de 95% de confianza para μ. Encontramos, por tanto, el siguiente intervalo de confianza para $\mu = E(X)$:

$$501.2 - \tfrac{4}{10}(1.96), 501.2 + \tfrac{4}{10}(1.96), \quad \text{llega a ser} \quad (500.4; 502.0).$$

Nuevamente es útil un comentario. Al establecer que (500.4; 502.0) es un intervalo de 95% de confianza para μ, no estamos diciendo que el 95% de las veces el promedio muestral quedará en *ese* intervalo. La próxima vez que saquemos una muestra aleatoria, $\overline{X}$ posiblemente será distinta y, por tanto, los extremos del intervalo de confianza serán diferentes. Estamos diciendo que el 95% de las veces μ estará contenido en el intervalo $(\overline{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n}, \overline{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n})$. Cuando afirmamos que $500.4 < \mu < 502.0$ simplemente estamos adoptando el punto de vista de creer que algo es así cuando sabemos que es verdadero la mayor parte del tiempo.

Observación: El intervalo de confianza construido no es único. Tal como hay muchos estimados (puntuales) para un parámetro, podemos construir muchos intervalos de confianza. Aunque no discutiremos el problema de lo que podríamos designar como un intervalo de confianza "mejor" establezcamos, sin embargo, un hecho obvio. Si se comparan los intervalos de confianza que tienen el mismo coeficiente, preferiríamos el que tiene menos longitud esperada.

La longitud L del intervalo de confianza antes considerado puede escribirse como

$$L = (\overline{X} + n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2}) - (\overline{X} - n^{-1/2}\sigma K_{1-\alpha/2}) = 2\sigma n^{-1/2} K_{1-\alpha/2}.$$

Así, L es una constante. Además, resolviendo la ecuación anterior para n da

$$n = (2\sigma K_{1-\alpha/2}/L)^2.$$

Por lo tanto, podemos determinar n (para α y σ dadas) de modo que el intervalo de confianza tenga una longitud prefijada. En general (como se ilustró en el ejemplo anterior), L será una función decreciente de n: cuanto más pequeña deseemos que sea L más grande debe tomarse n. En el caso anterior especialmente debemos cuadruplicar n a fin de dividir a L.

14.8 La distribución t *de Student*

El análisis del ejemplo anterior dependía mucho del hecho de que la varianza σ^2 era conocida. ¿Cómo debemos modificar el procedimiento si no conocemos el valor de σ^2?

Supongamos que estimamos σ^2 utilizando el estimado sin sesgo

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

Consideremos la variable aleatoria

$$t = \frac{(\overline{X} - \mu)\sqrt{n}}{\hat{\sigma}}. \tag{14.10}$$

Debería ser intuitivamente evidente que la distribución de probabilidades de la variable aleatoria t es considerablemente más complicada que la de $Z = (\overline{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$, ya que en la definición de t, tanto el numerador como el denominador son variables aleatorias, mientras que Z es simplemente una función lineal de $X_1, \ldots, X_n$. Para obtener la distribución de probabilidades de t usemos los hechos siguientes:

a) $Z = (\overline{X} - \mu)\sqrt{n}/\sigma$ no tiene distribución $N(0,1)$.

b) $V = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ tiene una distribución χ-cuadrada con $(n-1)$ grados de libertad. (Véase el Teorema 13.4.)

c) Z y V son variables aleatorias independientes. (Esto no es muy fácil de demostrar, y no lo verificaremos aquí.

Con ayuda del teorema siguiente podemos obtener ahora la fdp de t.

Teorema 14.3. Supóngase que las variables aleatorias Z y V son independientes y tienen distribuciones $N(0,1)$ y χ^2_k, respectivamente. Definimos

$$t = \frac{Z}{\sqrt{(V/k)}}.$$

Entonces, la fdp de r está dada por

$$h_k(t) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{14.11}$$

Esta distribución se conoce como *distribución t de Student* con k grados de libertad.

Observaciones: a) La demostración de este teorema no se proporciona aquí, pero se sugiere en la sección de problemas. (Véase el Prob. 14.17.) Tenemos las herramientas disponibles con las cuales podemos encontrar $h_k(t)$ muy fácilmente. Primero necesitamos determinar la fdp de $\sqrt{V/k}$, la cual se obtiene con facilidad conociendo la fdp de V. Entonces sólo necesitamos aplicar el teorema 6.5 que da la fdp del cociente de dos variables aleatorias independientes.

b) El teorema anterior se puede aplicar directamente para obtener la fdp de $t = (\overline{X} - \mu)\sqrt{n}/\hat{\sigma}$, la variable aleatoria antes considerada. Esta variable tiene la distribución t de Student con $(n-1)$ grados de libertad. Nótese que aunque el valor de t depende de μ, su distribución no.

c) La gráfica de h_k es simétrica, como se muestra en la figura 14.8. En realidad, se asemeja a la gráfica de la distribución normal, y el lector puede demostrar que

$$\lim_{k\to\infty} h_k(t) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-t^2/2}.$$

d) Debido a su importancia, esta distribución ha sido tabulada. (Véase el Apéndice.) Para una α dada $0.5 < \alpha < 1$, los valores de $t_{k,\alpha}$, que satisfacen la condición

$$\int_{-\infty}^{t_{k,\alpha}} h_k(t)\ dt = \alpha$$

están tabulados. (Véase la Fig. 14.9.) (Para los valores de α que satisfacen $0 < \alpha < 0.5$, podemos usar los valores tabulados debido a la simetría de la distribución.)

e) Esta distribución se llama así en honor del estadístico inglés W. S. Gosset, quien publicó su trabajo con el seudónimo de "Student".

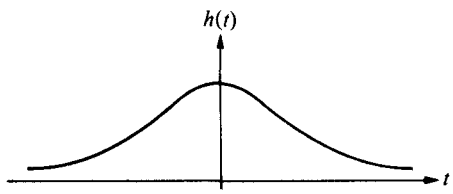


FIGURA 14.8

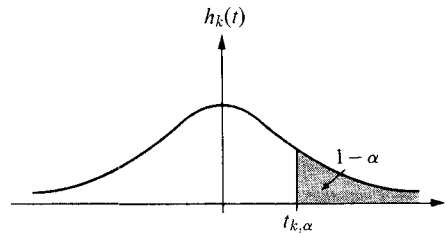


FIGURA 14.9

Volvamos ahora al problema presentado al principio de esta sección. ¿Cómo obtenemos un intervalo de confianza para el promedio de una variable aleatoria distribuida normalmente si la varianza es *desconocida*?

De una manera completamente análoga a la usada en la sección 14.7, obtenemos el siguiente intervalo de confianza para μ, con coeficiente de confianza $(1-\alpha)$:

$$(\overline{X} - n^{-1/2}\hat{\sigma}t_{n-1,1-\alpha/2}, \overline{X} + n^{-1/2}\hat{\sigma}t_{n-1,1-\alpha/2}).$$

Así, el intervalo de confianza anterior tiene la misma estructura que el previo, con la diferencia importante de que el valor conocido de α se ha sustituido por el estimado $\hat{\sigma}$ y la constante $K_{1-\alpha/2}$, obtenida anteriormente de las tablas de la distribución normal, se ha sustituido por $t_{n-1,1-\alpha/2}$, obtenida de las tablas de la distribución t.

Observación: La longitud L del intervalo de confianza anterior es igual a

$$L = 2n^{-1/2}t_{n-1,1-\alpha/2}\hat{\sigma}.$$

Luego, L no es una constante, puesto que depende de $\hat{\sigma}$, que a su vez depende de los valores muestrales $(X_1, \ldots, X_n)$.

EJEMPLO 14.18. Se hicieron diez mediciones sobre la resistencia de cierto tipo de alambre, dando los valores $X_1, \ldots, X_{10}$. Supóngase que $\overline{X} = 10.48$ ohms y $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - X)^2} = 1.36$ ohms. Supongamos que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y que deseamos obtener un intervalo de confianza para μ con coeficiente de confianza 0.90. Por tanto, $\alpha = 0.10$. De las tablas de la distribución t encontramos que $t_{9,0.95} = 1.83$. Luego, el intervalo de confianza pedido es

$$\left(10.48 - \frac{1}{\sqrt{10}}(1.36)(1.83)10.48 + \frac{1}{\sqrt{10}}(1.36)(1.83)\right) = (9.69, 11.27).$$

14.9 Más sobre los intervalos de confianza

Aunque no intentamos dar una presentación general de este tema, deseamos continuar considerando algunos ejemplos importantes.

Algunas veces deseamos obtener un intervalo de confianza para una *función* particular de un parámetro desconocido, conociendo un intervalo de confianza para el parámetro mismo. Si la función es monótona, esto puede satisfacerse como lo ilustra el ejemplo siguiente.

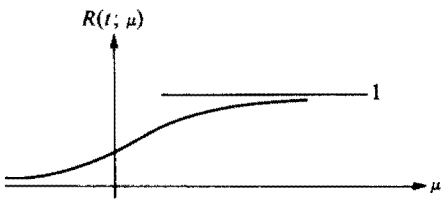


FIGURA 14.10

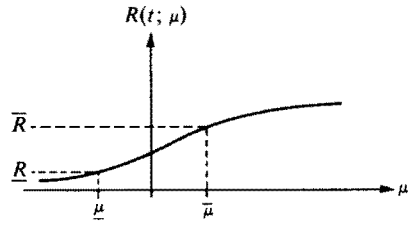


FIGURA 14.11

EJEMPLO 14.19. Supóngase que la duración X de un artículo tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y que σ^2 es conocida. La confiabilidad del artículo para un tiempo de servicio de t horas está dada por

$$R(t;\mu) = P(X > t) = 1 - \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

Puesto que $\partial R(t;\mu)/\partial\mu > 0$ para toda μ, tenemos que para cada t fija, $R(t;\mu)$ es una función creciente de μ. (Véase la Fig. 14.10.) Luego, podemos proceder como sigue para obtener un intervalo de confianza para $R(t;\mu)$. Sea $(\underline{\mu}, \overline{\mu})$ el intervalo de confianza para μ obtenido en la sección 14.7. Sean $\underline{R}$ y $\overline{R}$, respectivamente, los extremos inferior y superior del intervalo de confianza pedido para $R(t;\mu)$. Si definimos a $\underline{R}$ y $\overline{R}$ por las relaciones

$$\underline{R} = 1 - \Phi\left(\frac{t-\underline{\mu}}{\sigma}\right) \quad \text{y} \quad \overline{R} = 1 - \Phi\left(\frac{t-\overline{\mu}}{\sigma}\right),$$

encontramos que $P(\underline{R} \leq R \leq \overline{R}) = P(\underline{\mu} \leq \mu \leq \overline{\mu}) = 1 - \alpha$, y que, por tanto, $(\underline{R}, \overline{R})$ representa un intervalo de confianza para $R(t;\mu)$ con coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$. (Véase la Fig. 14.11.)

Usemos los valores muestrales obtenidos en la sección 14.7 para ilustrar este procedimiento. Supóngase que deseamos un intervalo de confianza para la confiabilidad del componente cuando se usó para $t = 500$ horas. Puesto que encontramos $\underline{\mu} = 500.4$ y $\overline{\mu} = 502.0$, obtenemos

$$\underline{R} = 1 - \Phi\left(\frac{500 - 500.4}{4}\right) = 0.6554, \quad \overline{R} = 1 - \Phi\left(\frac{500 - 502}{4}\right) = 0.6915.$$

Hasta ahora sólo hemos considerado intervalos de confianza *bilaterales*. Es decir, hemos obtenido dos estadísticos (algunas veces llamados cota superior e inferior de confianza), sean $L(X_1, \ldots, X_n)$ y $U(X_1, \ldots, X_n)$, tales que $P[L \leq \theta \leq U] = 1 - \alpha$, donde θ es el parámetro desconocido.

A menudo sólo estamos interesados en obtener intervalos de confianza unilaterales de la forma siguiente:

$$P[\theta \leq U] = 1 - \alpha \quad \text{o} \quad P[L \leq \theta] = 1 - \alpha.$$

Ilustremos lo anterior con ejemplos.

EJEMPLO 14.20. Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ y deseamos obtener un intervalo de confianza unilateral para el parámetro desconocido σ^2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de X.

Del teorema 13.4 sabemos que $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\sigma^2$ tiene distribución χ^2_{n-1}. Por tanto, de las tablas de la distribución χ-cuadrada podemos obtener un número $\chi^2_{n-1,1-\alpha}$ tal que

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right] = 1 - \alpha.$$

(Véase la Fig. 14.12.) La probabilidad anterior puede escribirse como sigue:

$$P\left[\sigma^2 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha}}\right] = 1 - \alpha.$$

Por tanto, $\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2/\chi^2_{n-1,1-\alpha}, \infty\right)$ es el intervalo de confianza unilateral pedido para σ^2 con coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$.

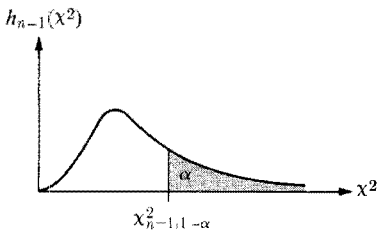


FIGURA 14.12

EJEMPLO 14.21. Supóngase que la duración X de un instrumento electrónico está distribuida exponencialmente con parámetro $1/\beta$. Luego, $E(X) = \beta$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de X. En el ejemplo 14.7 hemos encontrado que $\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ es el estimado ML de β. Del colorario del teorema 10.9 encontramos que $2n\overline{X}/\beta$ tiene distribución χ^2_{2n}. Por lo tanto, $P[2n\overline{X}/\beta \geq \chi^2_{2n,1-\alpha}] = \alpha]$, donde el número $\chi^2_{2n,1-\alpha}$ se obtiene de las tablas de distribución χ-cuadrada.

Si deseamos un intervalo de confianza (inferior) para la confiabilidad $R(t;\beta) = P(X > t) = e^{-t/\beta}$, procedemos como sigue. Se multiplica la desigualdad anterior por $(-t)$ y se reagrupan los términos, obteniendo

$$P\left[(-t/\beta) \geq -t\chi^2_{2n,1-\alpha}/\overline{X}2n\right] = 1 - \alpha.$$

Esto a su vez implica que, puesto que e^x es una función creciente de x,

$$P\left\{R(t;\beta) = e^{-t/\beta} \geq \exp\left[-\frac{t\chi^2_{2n,1-\alpha}}{\overline{X}2n}\right]\right\} = 1 - \alpha.$$

Luego, $(\exp[-t\chi^2_{2n,1-\alpha}/\overline{X}2n], \infty)$ es un intervalo de confianza unilateral para $R(t;\beta)$ con coeficiente de confianza $(1 - \alpha)$.

Como una ilustración final de un intervalo de confianza, encontramos un intervalo de confianza para el parámetro p asociado con una variable aleatoria X distribuida *binomialmente*. Sólo consideraremos el caso donde n, el número de repeticiones del experimento que da origen a X, es bastante grande como para poder usar la *aproximación normal*.

Representemos con $X/n = h$ la frecuencia relativa de un evento A en n repeticiones de un experimento para el cual $P(A) = p$. Por tanto, $E(h) = p$ y $V(h) = pq/n$, donde $q = 1 - p$.

Usando la aproximación normal a la distribución binomial, podemos escribir

$$P\left[\frac{|h-p|}{\sqrt{pq/n}} \leq K\right] = P\left[|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}\right] \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-K}^{K} e^{-t^2/2}\, dt$$
$$= 2\Phi(K) - 1,$$

donde, como siempre, $\Phi(K) = (1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{K} e^{-t^2/2}\, dt$. Así, si hacemos igual a $(1 - \alpha)$ la probabilidad anterior, podemos obtener el valor de

K de la tabla de la distribución normal. Es decir, $2\Phi(K) - 1 = 1 - \alpha$ implica $K = K_{1-\alpha/2}$. Puesto que estamos interesados en obtener un intervalo de confianza para p, debemos volver a escribir la desigualdad anterior $\{|h - p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$ como una desigualdad en p. Ahora $\{|h - p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$ es equivalente a $\{(h - p)^2 \leq K^2(1 - p)p/n\}$. Si consideramos un sistema de coordenadas, (h, p), la desigualdad anterior representa el contorno y el interior de una elipse. La forma de la elipse está determinada por K y n: a mayor n, más fina es la elipse.

Considérese un punto $Q(h, p)$ en el plano hp. (Véase la Fig. 14.13.) Q será un punto "aleatorio", puesto que su primera coordenada h será determinada por el resultado del experimento. Puesto que Q quedará dentro de la elipse si y sólo si $\{|h - p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$, la probabilidad de que esto ocurra será $2\Phi(K) - 1$. Si deseamos tener esta probabilidad igual a $(1 - \alpha)$, debemos elegir adecuadamente a K, es decir $K = K_{1-\alpha/2}$.

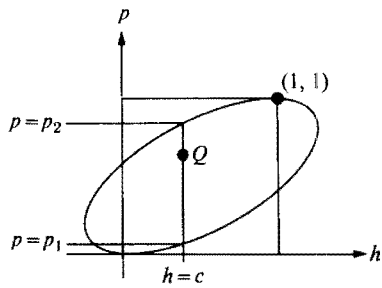


FIGURA 14.13

Ahora p es desconocida. (Éste, por supuesto, es nuestro problema.) La recta $h = c$ (constante) cortará la elipse en dos lugares, sean $p = p_1$ y $p = p_2$. (Es fácil verificar que dadas α y h, siempre habrá dos valores distintos de p.)

Los valores p_1 y p_2 se pueden obtener como solución de la ecuación cuadrática (en p): $(h - p)^2 = K^2(1 - p)p/n$. Las soluciones son:

$$p_1 = \frac{hn + (K^2/2) - K\left[h(1-h)n + (K^2/4)\right]^{1/2}}{n + K^2},$$

$$p_2 = \frac{hn + (K^2/2) + K\left[h(1-h)n + (K^2/4)\right]^{1/2}}{n + K^2}. \qquad (14.12)$$

Por tanto, $\{|h-p| \leq K\sqrt{pq/n}\}$ es equivalente a $\{p_1 \leq p \leq p_2\}$. Así, si se escoge K de modo que el evento anterior tenga probabilidad $(1-\alpha)$, obtenemos un intervalo de confianza para p, digamos (p_1, p_2), con coeficiente de confianza $(1-\alpha)$. Para resumir: con el objeto de obtener un intervalo de confianza para $p = P(A)$ con coeficiente de confianza $(1-\alpha)$, se realiza el experimento n veces y se calcula la frecuencia relativa del evento A, digamos h. Luego se calculan p_1 y p_2 de acuerdo con las ecuaciones (14.12), donde K se determina de las tablas de la distribución normal. Recordemos que este procedimiento es válido sólo si n es suficientemente grande para justificar la aproximación normal.

Observación: Recuérdese que en las ecuaciones (14.12), $h = X/n$, donde X = número de ocurrencias del evento A. Luego, $X = nh$ y $n - X = n(1-h)$. Si además de n, tanto X y $n - X$ son grandes, p_1 y p_2 pueden aproximarse, respectivamente, por

$$p_1 \simeq h - \frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)}, \quad p_2 \simeq h + \frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{h(1-h)}.$$

EJEMPLO 14.22. En un proceso de producción se fabrican 79 artículos durante cierta semana. De esos, se encontró que 3 eran defectuosos. Así $h = \frac{3}{79} = 0.038$. Usando el procedimiento anterior, obtenemos (0.013, 0.106) como un intervalo de confianza para $p = P$(el artículo es defectuoso) con un coeficiente de confianza 0.95.

EJEMPLO 14.23. Una fábrica tiene un gran número de artículos almacenados, algunos de los cuales provienen de un método de producción que en la actualidad se considera de poca calidad, mientras que otros provienen de un proceso moderno. Del almacén se escogen al azar 3 000 artículos. De éstos, se encuentra que 1578 se han fabricado con el proceso de poca calidad. Utilizando la aproximación anterior para p_1 y p_2, el cálculo siguiente da un intervalo de confianza de 99% para p = proporción de artículos del proceso insatisfactorio.

$$h = \frac{1578}{3000} = 0.526, \quad k = 2.576,$$

$$p_1 = 0.526 - \frac{2.576}{\sqrt{3000}}\sqrt{(0.526)(0.474)} = 0.502,$$

$$p_2 = 0.526 + \frac{2.576}{\sqrt{3000}}\sqrt{(0.526)(0.474)} = 0.550.$$

PROBLEMAS

14.1. Supóngase que un objeto se mide en forma independiente con dos instrumentos, de medición diferentes. Sean L_1 y L_2 las longitudes que se midieron con el primero y el segundo, respectivamente. Si ambos instrumentos están correctamente calibrados, podemos suponer que $E(L_1) = E(L_2) = L$, la longitud verdadera. Sin embargo, la exactitud de los instrumentos no es necesariamente la misma. Si se mide la exactitud en términos de la varianza, entonces $V(L_1) \neq V(L_2)$. Al usar la combinación lineal $Z = aL_1 + (1 - a)L_2$ para el estimado de L, de inmediato se tiene que $E(Z) = L$. Es decir, Z es un estimado, insesgado de L. ¿Para que elección del valor de a, $0 < a < 1$, es mínima la varianza de Z?

14.2. Sea X una variable aleatoria con esperanza μ y varianza σ^2. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra de X. Hay muchos otros estimados de σ^2 que se sugieren además del ya propuesto. Demostrar que $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ es un estimado insesgado de σ^2 para un valor apropiado de C. Encontrar la elección del valor de C.

14.3. Supóngase que se obtienen 200 observaciones independientes, $X_1, \ldots, X_{200}$, de una variable aleatoria X. Se dice que $\sum_{i=1}^{200} X_i = 300$ y que $\sum_{i=1}^{200} X_i^2 = 3754$. Usando esos valores obtener un estimado de $E(X)$ y $V(X)$.

14.4. Una variable aleatoria X tiene fdp $f(x) = (\beta + 1)x^\beta$, $0 < x < 1$.

a) Obtener el estimado ML de β, con base en una muestra $X_1, \ldots, X_n$.
b) Evaluar el estimado si los valores muestrales son 0.3, 0.8, 0.27, 0.35, 0.62 y 0.55.

14.5. Los datos de la tabla 14.7 se obtuvieron de la distribución del espesor de la madera en los postes telefónicos. (W. A. Shewhart, *Economic Control of Quality of Manufactured Products*, Macmillan and Co., Nueva York, 1932, pág. 66.) Suponiendo que la variable aleatoria que se considera tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, obtener los estimados ML de μ y σ^2.

14.6. Supóngase que T, el tiempo para que ocurra la falla (en horas) de un instrumento electrónico tiene la siguiente fdp:

$$f(t) = \beta e^{-\beta(t-t_0)}, \quad t > t_0 > 0,$$
$$= 0 \qquad \text{para cualquier otro valor.}$$

(T tiene una distribución exponencial truncada a la izquierda en t_0). Supóngase que se prueban n artículos y que se anotan los tiempos en que ocurre la falla $T_1, \ldots, T_n$.

a) Suponiendo que t_0 es conocida, obtener el estimado ML de β.

TABLA 14.7

Espesor de la madera (pulg.)	Frecuencia	Espesor de la madera (pulg.)	Frecuencia
1.0	2	3.7	123
1.3	29	4.0	82
1.6	62	4.3	48
1.9	106	4.6	27
2.2	153	4.9	14
2.5	186	5.2	5
2.8	193	5.5	1
3.1	188	Total de frecuencias: 1370	
3.4	151		

b) Suponiendo que t_0 es desconocida, pero β conocida, obtener el estimado ML de t_0.

14.7. Considérese la misma ley de falla descrita en el problema 14.6. Esta vez se prueban N artículos durante T_0 horas ($T_0 > t_0$) y se anota el número k de artículos que fallan en tal periodo, digamos k. Responder la pregunta *a*) del problema 14.6.

14.8 Supóngase que X está distribuida uniformemente en $(-\alpha, \alpha)$. Encontrar el estimado ML de α, con base en una muestra aleatoria de tamaño n, $X_1, \ldots, X_n$.

14.9. *a*) Se efectúa un proceso hasta que un evento A particular ocurre por primera vez. En cada repetición, $P(A) = p$. Se supone que se necesitan n_1 repeticiones. Luego se repite el experimento y esta vez se requieren n_2 repeticiones para producir el evento A. Si esto se hace k veces, obtenemos la muestra $n_1, \ldots, n_k$. Basándose en esta muestra, obtener el estimado ML de p.

b)) Supóngase que k es muy grande. Encontrar el valor aproximado de $E(\hat{p})$ y $V(\hat{p})$, donde $\hat{p}$ es el estimado ML obtenido en *a*).

14.10. Se prueba un componente que se supone tiene una distribución exponencial de fallas y se observan las siguientes duraciones (en horas): 108, 212, 174, 130, 198, 169, 252, 168, 143. Usando esos valores muestrales, obtener un estimado ML para la confiabilidad del componente cuando se use durante un periodo de 150 horas.

14.11. Los datos siguientes representan la duración de bombillas eléctricas (en horas):

1009, 1085, 1123, 1181, 1235, 1249, 1263, 1292, 1327, 1338, 1348, 1352, 1359, 1368, 1379, 1397, 1406, 1425, 1437, 1438, 1441, 1458, 1483, 1488, 1499, 1505, 1509, 1519, 1541, 1543, 1548, 1549, 1610, 1620, 1625, 1638, 1639, 1658, 1673, 1682, 1720, 1729, 1737, 1752, 1757, 1783, 1796, 1809, 1828, 1834, 1871, 1881, 1936, 1949, 2007.

De los valores de la muestra anterior, obtener el estimado ML para la confiabilidad de tales bombillas eléctricas cuando se usan durante 1600 horas, suponiendo que la duración está distribuida normalmente.

14.12. Supóngase que se usan dos bombillas tal como se describe en el problema 14.11: *a*) en una conexión en serie y *b*) en una conexión en paralelo. En cada uno de los casos encontrar el estimado ML de la confiabilidad durante una operación de 1600 horas del sistema con base en los valores muestrales dados en el problema 14.11.

14.13. Supóngase que una fuente radiactiva emite partículas α de acuerdo con una distribución de Poisson. Es decir, si X es el número de partículas emitidas durante un intervalo de t minutos, entonces $P(X = k) = e^{-\lambda t}(\lambda t)^k/K!$. En vez de anotar el número real de partículas emitidas, supóngase que se observa el número de veces en que no se emitió ninguna partícula. Específicamente, supóngase que durante 50 minutos se observan 30 fuentes radiactivas que tienen la misma potencia y que en 25 casos al menos se emitió una partícula. Obtener el estimado ML de λ con base en esta información.

14.14. Una variable aleatoria X tiene distribución $N(\mu, 1)$. Se hacen 20 observaciones de X, pero, en vez de anotar su valor, sólo observamos si X es negativa o no. Suponiendo que el evento $\{X < 0\}$ ocurrió exactamente 14 veces, utilizar esta información para obtener el estimado ML de μ.

14.15. Supóngase que X tiene una distribución gamma; es decir, la fdp está dada por

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}, \quad x > 0.$$

Supóngase que r es conocida. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra de X, obtener el estimado ML de λ con base en esta muestra.

14.16. Supóngase que X tiene una distribución de Weibull con fdp

$$f(x) = (\lambda\alpha)x^{\alpha-1}e^{\lambda x^{\alpha}}, \quad x > 0.$$

Supóngase que α es conocida. Encontrar el estimado ML de λ con base en una muestra de tamaño n.

14.17. Demostrar el teorema 14.3. [Sugerencia: Véase la Observación *a*) que sigue a este teorema.]

14.18. Comparar el valor de $P(X \geq 1)$, donde X tiene distribución $N(0, 1)$, con $P(t \geq 1)$, donde t tiene distribución t de Student con:

a) 5 g.l. *b*) 10 g.l. *c*) 15 g.l. *d*) 20 g.l. *e*) 25 g.l.

14.19. Supóngase que X tiene una distribución de $N(\mu, \sigma^2)$. Una muestra de tamaño digamos, $X_1, \ldots, X_{30}$, da como resultado los valores siguientes: $\sum_{i=1}^{30} X_i = 700.8$, $\sum_{i=1}^{30} X_i^2 = 16\ 395.8$. Obtener un intervalo de confianza de 95% (bilateral) para μ.

14.20. Supóngase que X tiene una distribución $N(\mu, 4)$. Una muestra de tamaño 25 produce un promedio muestral $\overline{X} = 78.3$. Obtener un intervalo de confianza de 99% (bilateral) para μ.

14.21. Supóngase que la duración de un componente tiene una distribución normal, digamos $N(\mu, 9)$. Se prueban 20 componentes y se anotan sus tiempos para que ocurra la falla $X_1, \ldots, X_{20}$. Supóngase que $\overline{X} = 100.9$ horas. Obtener un intervalo de confianza de 99% (bilateral) para la confiabilidad $R(100)$.

14.22. Obtener un intervalo de confianza unilateral de 99% (inferior) para $R(100)$ del problema 14.21.

14.23. Supóngase que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ y σ^2 son desconocidos. Una muestra de tamaño 15 produce los valores $\sum_{i=1}^{15} X_i = 8.7$ y $\sum_{i=1}^{15} X_i^2 = 27.3$. Obtener un intervalo de confianza de 95% (bilateral) para σ^2.

14.24. Se prueban cien componentes, 93 de los cuales funcionan más de 500 horas. Obtener un intervalo de confianza de 95% (bilateral) para $p = P$ (un componente funciona más de 500 horas). [Sugerencia: Usar la Ec. 14.12.]

14.25. Supóngase que X, la longitud de un perno, tiene distribución $N(\mu, 1)$. Se fabrica un gran número de pernos y posteriormente se separan en dos grandes lotes. El lote 1 contiene sólo aquellos pernos para los cuales $X > 5$, mientras que el lote 2 contiene el resto. Una muestra de tamaño n se saca del lote 1 y se miden las longitudes de los pernos elegidos. Así obtenemos una muestra $Y_1, \ldots, Y_n$ de la variable aleatoria Y, que es una variable aleatoria distribuida normalmente y truncada en 5 a la izquierda. Escribir la ecuación que debe resolverse a fin de obtener el estimado ML de μ con base en la muestra $(Y_1, \ldots, Y_n)$ en términos de las funciones ϕ y Φ tabuladas, donde $\phi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$ y Φ es la fda de la distribución $N(0, 1)$.

14.26. (La distribución F). Sean X y Y variables aleatorias independientes con distribuciones $\chi^2_{n_1}$ y $\chi^2_{n_2}$, respectivamente. La variable aleatoria F se define como sigue $F = (X/n_1)(Y/n_2) = n_2X/n_1Y$. (Esta variable aleatoria desempeña un papel importante en muchas aplicaciones estadísticas.) Demostrar que la fdp de F está dada por la expresión siguiente:

$$h(f) = \frac{\Gamma[(n_1 + n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} f^{(n_1/2)-1}(1+(n_1/n_2)f)^{-(1/2)(n_1+n_2)}, f > 0.$$

[Ésta se llama distribución F (Snedecor) con (n_1, n_2) grados de libertad. Debido a su importancia, se han tabulado las probabilidades asociadas con la variable aleatoria F.] [*Indicación*: Para derivar la fdp anterior, usar el teorema 6.5.]

14.27. Dibujar la gráfica de la fdp h como se da en el problema 14.26, suponiendo que $n_1 > n_2 > 2$.

14.28. Una razón de la importancia de la distribución F es la siguiente. Suponer que X y Y son variables aleatorias independientes con distribuciones $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $N(\mu_y, \sigma_y^2)$, respectivamente. Sean $X_1, \ldots, X_{n_1}$ y $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ muestras aleatorias de X y Y, respectivamente. Entonces, el estadístico $C \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X})^2 / \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \overline{Y})^2$ tiene una distribución F para una elección apropiada de C. Demostrar esto y determinar C. ¿Cuáles son los grados de libertad asociados con esta distribución?

14.29. Supóngase que la variable aleatoria t tiene una distribución t de Student con 1 grado de libertad. ¿Cuál es la distribución de t^2? Identifíquela.

14.30. Supóngase que X está distribuida normalmente. Se obtiene una muestra aleatoria de tamaño 4 y se calcula $\overline{X}$, el promedio muestral. Si la suma de los cuadrados de las desviaciones de esas 4 mediciones de $\overline{X}$ es igual a 48, obtener un intervalo de confianza de 95% (bilateral) para $E(X)$ en términos de $\overline{X}$.

14.31. La muestra siguiente de tamaño 5 se obtuvo de la variable aleatoria bidimensional (X, Y). Usando esos valores, calcular el coeficiente de correlación muestral.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3	1	2

14.32. Supóngase que $E(Y) = \alpha X + \beta$. Una muestra de tamaño 50 está disponible, sea (x_i, Y_i), $i = 1, \ldots, 50$ para la cual $\overline{x} = \overline{Y} = 0$, $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 10$, $\sum_{i=1}^{50} Y_i^2 = 15$ y $\sum_{i=1}^{50} x_i Y_i = 8$.

a) Determinar los estimados de mínimos cuadrados de los parámetros α y β, es decir $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b) ¿Cuál es el valor de la suma mínima de cuadrados $\sum_{i=1}^{50} [Y_i - (\hat{\alpha} x_i + \hat{\beta})]^2$.

14.33. Se podría suponer (erróneamente) que siempre puede encontrarse un estimado insesgado para un parámetro desconocido. El hecho de que no es así, se ilustra con el ejemplo siguiente. Supóngase que se hacen n repeticiones de un experimento y que un evento especial A se verifica exactamente k veces. Si hay una probabilidad constante $p = P(A)$ por hipótesis de que A ocurra cada vez que se hace el experimento, podríamos estar interesados en estimar

la razón $r = p/(1-p)$. Para verificar que no existe un estimado insesgado de $r = p/(1-p)$ [con base en las observaciones de kA y $(n-k)\overline{A}$], suponemos que en realidad existe tal estimado. Es decir, supóngase que $\hat{r} = h(k)$ es un estadístico para el cual $E(\hat{r}) = p/(1-p)$. Específicamente, supóngase que $n = 2$ y, por tanto, $k = 0$, 1, o 2. Desígnese los tres valores correspondientes de $\hat{r}$ por a, b y c. Demostrar que $E(\hat{r}) = p/(1-p)$ da como resultado una contradicción al observar lo que sucede a la izquierda y a la derecha de esta ecuación cuando $p \to 1$.

14.34. Verificar que los estimados de los mínimos cuadrados $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ como se dan en las ecuaciones (14.7) y (14.8) son insesgados.

14.35. Verificar las expresiones para $V(\hat{\alpha})$ y $V(\hat{\beta})$, como se dan en la ecuación (14.9).

14.36. Suponer que $E(Y) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, donde X está preasignada. Con base en una muestra (x_i, Y_i), $i = 1, \ldots, n$, determinar los estimados de mínimos cuadrados de los parámetros α, β y γ.

14.37. Con ayuda de la tabla 7, obtener una muestra de tamaño 20 de una variable aleatoria que tenga distribución $N(2, 4)$.

a) Supóngase que esta muestra se obtuvo de una variable aleatoria que tiene distribución $N(\alpha, 4)$. Usar los valores muestrales para obtener un intervalo de confianza de 95% para α.

b) Lo mismo que *a*) excepto que se supone que la muestra proviene de la distribución $N(\alpha, \beta^2)$ con β^2 desconocida.

c) Comparar las longitudes de los intervalos de confianza en *a*) y *b*) y comentar.

15

Pruebas de hipótesis

15.1 Introducción

En este capítulo analizaremos otra manera de abordar el problema de hacer una afirmación acerca de un parámetro desconocido asociado con una distribución de probabilidades con base en una muestra aleatoria. En vez de encontrar un estimado para el parámetro, a menudo será conveniente formular una hipótesis sobre un valor para éste y luego usar la información de la muestra para confirmar o rechazar el valor de la hipótesis. Los conceptos que se presentan en este capítulo pueden formularse sobre una base teórica correcta. Sin embargo, no trataremos este tema desde un punto de vista formal. En su lugar, consideraremos varios procedimientos que son intuitivamente muy atractivos. Estudiaremos algunas propiedades de los procedimientos sugeridos, pero no intentaremos indicar por qué deberán preferirse algunos métodos propuestos en vez de una alternativa. El lector interesado puede obtener un fundamento más teórico de algunos de estos procedimientos consultando las referencias que se sugieren al final del capítulo.

Consideremos el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 15.1. Un fabricante se ha dedicado a la producción de pinzas que se usarán en ciertas condiciones de tensión. Se ha encontrado que la duración (en horas) de esos artículos está distribuida normalmente, $N(100,9)$. Se ha introducido un nuevo sistema de fabricación, cuyo objetivo es alargar su duración. Es decir, se espera que la duración X (correspondiente a los artículos producidos con el nuevo método) tenga una distribución $N(\mu,9)$, donde $\mu > 100$. (Supongamos que la varianza permanece igual. Esto significa, esencialmente, que la variabilidad del nuevo proceso es la misma que la del antiguo.)

Así, el fabricante y el comprador potencial están interesados en probar la siguiente hipótesis:

$$H_0\colon \mu = 100 \quad \text{contra} \quad H_1\colon \mu > 100.$$

(Estamos haciendo la suposición tácita de que el nuevo proceso no puede ser peor que el antiguo.) H_0 se llama *hipótesis nula*, y H_1 *hipótesis alternativa*.

Esencialmente estamos encarando un problema similar a uno expuesto en el capítulo 14. Estamos estudiando una variable aleatoria y no conocemos el valor de un parámetro asociado con su distribución. Este problema se podría resolver como lo hicimos antes, al estimar simplemente μ. Sin embargo, en muchas situaciones en realidad estamos interesados en tomar una *decisión específica:* ¿deberíamos aceptar o rechazar la hipótesis H_0? Así, no volveremos a tratar los conceptos previos de estimación, sino que procederemos a desarrollar algunos conceptos especialmente apropiados para resolver el problema específico que tratamos.

Empezamos por obtener una muestra de tamaño n de la variable aleatoria X. Es decir, elegimos al azar n artículos fabricados por el nuevo proceso y anotamos cuánto tiempo funciona cada uno, así obtenemos la muestra $X_1,\ldots,X_n$. Luego calculamos el promedio aritmético de esos números, digamos $\bar{X}$. Puesto que se sabe que $\bar{X}$ es un "buen" estimado de μ, parece razonable que basemos nuestra decisión de aceptar o rechazar H_0 en el valor de $\bar{X}$. Puesto que estamos interesados en la discriminación entre $\mu = 100$ y los valores de μ mayores que 100, parece razonable que debamos rechazar H_0 si $(\bar{X} - 100)$ es "demasiado grande".

Así, llegamos al siguiente procedimiento (sobre una base estrictamente intuitiva), llamado usualmente prueba de la hipótesis: se rechaza H_0 si $\bar{X} - 100 > C'$ o, de manera equivalente, si $\bar{X} > C$ (donde C es una constante por determinar), y se acepta en cualquier otro caso.

Nótese que la forma particular de la prueba que estamos usando fue sugerida en parte por la hipótesis alternativa H_1. Este es un punto al cual nos referiremos más adelante. Si en la situación anterior hubiésemos estado interesados en probar H_0: $\mu = 100$ contra H_1': $\mu \neq 100$, habríamos usado la prueba: rechazar H_0 si $|\bar{X} - 100| > C'$. Ahora estamos en una posición análoga a la que nos encontrábamos cuando construimos un estimado $\hat{\theta}$ para el parámetro θ. Nos preguntábamos: ¿cuán "bueno" es el estimado? ¿Qué propiedades deseables tiene? Podemos formular preguntas similares acerca de la prueba que hemos construido. ¿Cuán "buena" es la prueba? ¿Qué propiedades posee? ¿Cómo la podríamos comparar con otra posible prueba?

A fin de responder tales preguntas, primero debemos verificar que no existe solución, en el sentido usual, para el problema que estamos proponiendo. Es decir, por simple inspección de algunos de los artículos que se están fabricando nunca podemos estar *seguros* de que $\mu = 100$. (Nótese otra vez la analogía con el problema de estimación: no esperamos que nuestro estimado $\hat{\theta}$ sea igual a θ. Simplemente esperamos que esté "cercano" a θ.) Lo mismo es cierto aquí: una prueba no conducirá siempre a la decisión correcta, pero una "buena" prueba conduciría "la mayoría de las veces" a la decisión correcta.

Seamos más precisos. Básicamente hay dos tipos de error que podemos cometer. Podemos rechazar H_0 cuando de hecho H_0 sea verdadera; es decir, cuando la calidad de las pinzas no haya mejorado. Ésto puede ocurrir debido a que escogimos unas cuantas pinzas más resistentes en nuestra muestra que no son típicas de la producción completa. O, alternativamente, podemos aceptar H_0 cuando de hecho H_0 sea falsa; es decir, cuando la calidad de las pinzas haya mejorado. Hagamos la siguiente definición formal:

Definición.

Error tipo 1: rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera.
Error tipo 2: aceptar H_0 cuando H_0 es falsa.

Debe ser evidente que no podemos evitar por completo cometer esos errores. Trataremos de mantener relativamente pequeña la probabilidad de cometerlos.

Para enfrentar este problema presentaremos la muy importante noción de función de operación característica de la prueba, digamos L, que es la siguiente función del parámetro (desconocido) μ.

Definición. La *función de operación característica* (función OC) de la prueba anterior se define como

$$L(\mu) = P(\text{aceptar } H_0|\mu) = P(\bar{X} \leq C|\mu).$$

Es decir, $L(\mu)$ es la probabilidad de aceptar H_0, considerada como una función de μ.

Observación: Otra función, muy relacionada con la función OC, es la *función de potencia* definida por

$$H(\mu) = P[\text{rechazar } H_0|\mu].$$

Por lo tanto, $H(\mu) = 1 - L(\mu)$. Usaremos la función OC para describir propiedades de la prueba aunque esto se podría hacer fácilmente en términos de la función de potencia.

En el caso específico que se está considerando, podemos obtener la siguiente expresión explícita para L: si μ es el valor verdadero de $E(X)$, entonces $\bar{X}$ tiene distribución $N(\mu, 9/n)$. Luego,

$$L(\mu) = P(\bar{X} \leq C|\mu) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{3/\sqrt{n}} \leq \frac{C - \mu}{3/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left[\frac{(C - \mu)\sqrt{n}}{3}\right],$$

donde, como siempre,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-x^2/2} dx.$$

Las siguientes propiedades de $L(\mu)$ se verifican con facilidad:

a) $L(-\infty) = 1$.

b) $L(+\infty) = 0$.

c) $dL/d\mu < 0$ para toda μ. Por tanto, L es una función estrictamente decreciente de μ.)

Así, la gráfica de la función L tiene en general la apariencia de la curva de la figura 15.1. (La forma específica dependerá, por supuesto, de la elección de la constante C y del tamaño de muestra n.)

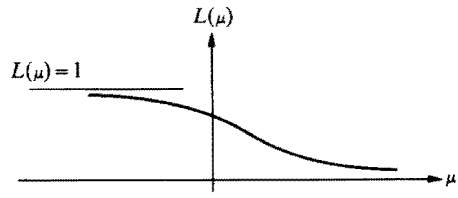


FIGURA 15.1

Considérese $1 - L(100)$. Este número representa la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es verdadera. Es decir, $1 - L(100)$ representa la probabilidad de un error del tipo 1. Si se dan n y C, entonces $1 - L(100)$ está determinada completamente. Por ejemplo, si tomamos $n = 50$ y $C = 101$, obtenemos

$$1 - L(100) = 1 - \Phi\left[\frac{101 - 100}{3}\sqrt{50}\right]$$

$$= 1 - \Phi(2.37) = 0.009.$$

Así, esta prueba particular nos conduciría a rechazar H_0 en forma errónea alrededor del 0.9% de las veces.

A menudo consideramos el problema desde un punto de vista algo diferente. Supóngase que se da el tamaño de muestra n y que la probabilidad de un error del tipo 1 está *especificada*, es decir, $1 - L(100) = \alpha$ o, de manera equivalente, $L(100) = 1 - \alpha$. ¿Cuál sería el valor de C?

Específicamente, si tomamos $n = 50$ y elegimos $\alpha = 0.05$, obtenemos C como solución de la siguiente ecuación:

$$0.95 = \Phi\left(\frac{C - 100}{3}\sqrt{50}\right).$$

De la tabla de la distribución normal esto da como resultado

$$1.64 = \frac{C - 100}{3}\sqrt{50}.$$

Por tanto,

$$C = 100 + \frac{3(1.64)}{\sqrt{50}} = 100.69$$

Así, si rechazamos la hipótesis cada vez que el promedio muestral es mayor que 100.69, estamos garantizando que un error del tipo 1 ocurrirá

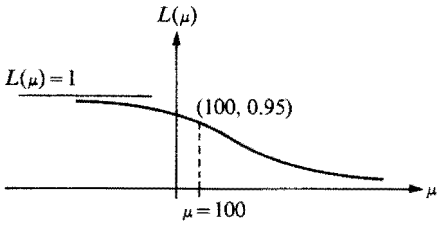


FIGURA 15.2

con una probabilidad de 0.05. Puesto que ahora se conocen n y C, la función OC está completamente especificada. Su gráfica se muestra en la figura 15.2. El valor 0.05 se llama *nivel de significación* de la prueba (o, algunas veces, *tamaño* de la prueba). En la mayor parte de los problemas se supone que este valor es menor que 0.1).

Nótese que al especificar α y el tamaño de la muestra n, sólo se debe determinar la constante C a fin de especificar completamente la prueba. Hicimos esto insistiendo en que la gráfica de la función OC pasa a través de un punto especificado, a saber (100, 0.95). (Debe ser evidente cómo se modificaría el procedimiento anterior si hubiésemos escogido un valor distinto a 0.05 para el nivel de significación.)

Ahora que la función OC está completamente especificada, podemos encontrar las coordenadas de cualquier otro punto. Por ejemplo, ¿cuál es el valor de $L(102)$?

$$L(102) = \Phi\left(\frac{100.69 - 102}{3}\sqrt{50}\right)$$

$$= \Phi(-3.1) = 0.00097.$$

Así, para la prueba que se considera, la probabilidad de aceptar H_0: $\mu = 100$ cuando de hecho $\mu = 102$ es igual a 0.00097. Por tanto, la probabilidad de un error del tipo 2 es muy pequeña si $\mu = 102$. Puesto que L es una función decreciente de μ, observamos que $L(\mu) < 0.00097$ para toda $\mu > 102$.

Si queremos escoger a n y C, debemos especificar *dos* puntos a través de los cuales pasa la gráfica de la función OC. De esta manera podemos controlar no sólo la probabilidad de error del tipo 1, sino también la probabilidad de error del tipo 2.

Supóngase que en el ejemplo que estamos considerando deseamos evitar el rechazo de H_0 cuando $\mu \geq 102$. Así, podemos hacer $L(102) = 0.01$, por ejemplo, y puesto que L es una función decreciente de μ, se deduce que $L(\mu) \leq 0.01$ para $\mu > 102$. (Véase la Fig. 15.3.) Si pedimos

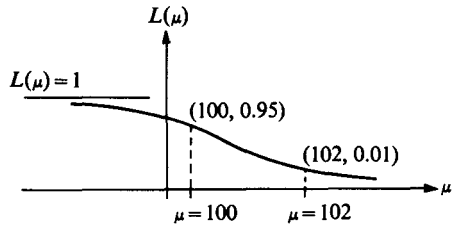


FIGURA 15.3

también un nivel de significación de 0.05, obtenemos las siguientes ecuaciones para la determinación de n y C:

$$L(100) = 0.95, \quad L(102) = 0.01$$

Estas ecuaciones se convierten en

$$0.95 = \Phi\left(\frac{C - 100}{3}\sqrt{n}\right), \quad 0.01 = \Phi\left(\frac{C - 102}{3}\sqrt{n}\right).$$

De las tablas de la distribución normal encontramos que estas expresiones son equivalentes a

$$1.64 = \frac{C - 100}{3}\sqrt{n}, \quad -2.33 = \frac{C - 102}{3}\sqrt{n}.$$

A fin de eliminar n, dividimos una ecuación entre la otra. Así,

$$(C - 102)(1.64) = (-2.33)(C - 100),$$

de la cual obtenemos

$$C = \frac{(102)(1.64) - (100)(-2.33)}{1.64 - (-2.33)} = 100.8.$$

Una vez que se conoce C, podemos obtener n elevando al cuadrado cualquiera de las ecuaciones anteriores.

Por lo tanto,

$$n = \left[\frac{3(1.64)}{C - 100}\right]^2 = 34.6 \simeq 35.$$

15.2 Formulación general: distribución normal con varianza conocida

Hemos considerado con cierto detalle un ejemplo relacionado con una hipótesis que implica el promedio de una variable aleatoria distribuida normalmente. Mientras algunos de los cálculos están aún frescos en nuestra mente, generalicemos este ejemplo como sigue.

Supóngase que X es una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 se supone conocida. Para probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu > \mu_0$ proponemos lo siguiente: obtener una muestra de tamaño n, calcular el promedio muestral $\bar{X}$ y rechazar H_0 si $\bar{X} > C$, donde C es una constante por determinar. La función OC de esta prueba está dada por

$$L(\mu) = P(\bar{X} \leq C) = \Phi\left(\frac{C - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

La forma general de la función OC es como se indica en la figura 15.4.

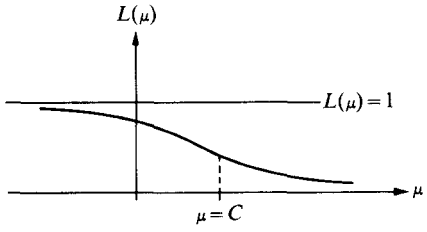


FIGURA 15.4

Las propiedades generales de $L(\mu)$ se establecen fácilmente (véase el Prob. 15.4):

a) $L(-\infty) = 1$.

b) $L(+\infty) = 0$.

c) $L'(\mu) < 0$ y, por tanto, L es una función estrictamente decreciente de μ. (15.1)

d) $L''(\mu) = 0$ para $\mu = C$ y, por tanto, la gráfica tiene aquí un punto de inflexión.

e) El aumento de n hace que la curva tenga más pendiente.

A fin de proceder, debemos considerar dos casos.

Caso 1. Si se da n y especificamos el nivel de significación de la prueba (es decir, la probabilidad de un error del tipo 1) con algún valor α, podemos obtener el valor de C al resolver la siguiente ecuación:

$$1 - \alpha = \Phi\left(\frac{C - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Definiendo K_α en la relación $1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{K_\alpha} e^{-t^2/2}dt = \alpha$, podemos escribir lo anterior como

$$K_{1-\alpha} = \frac{C - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

donde $K_{1-\alpha}$ puede obtenerse de la tabla de distribución normal. Entonces, rechazamos H_0 si

$$\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}K_{1-\alpha}.$$

Caso 2. Si vamos a determinar n y C, debemos especificar dos puntos sobre la gráfica de la curva OC: $1 - L(\mu_0) = \alpha$, el nivel de significación, y $L(\mu_1) = \beta$, la probabilidad de un error del tipo 2 para $\mu = \mu_1$. Luego, debemos resolver las ecuaciones siguientes para n y C:

$$1 - \alpha = \Phi\left(\frac{C - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right); \quad \beta = \Phi\left(\frac{C - \mu_1}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para C y n como se indicó anteriormente. Obtenemos

$$C = \frac{\mu_1 K_{1-\alpha} - \mu_0 K_\beta}{K_{1-\alpha} - K_\beta}, \quad n = \left[\frac{\sigma K_{1-\alpha}}{C - \mu_0}\right]^2,$$

donde $K_{1-\alpha}$ y K_β ya se han definido.

En el procedimiento bosquejado, hemos tratado la hipótesis alternativa H_1: $\mu > 100$ (o, en el caso general, $\mu > \mu_0$). En otro contexto podríamos considerar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1': $\mu < \mu_0$ o H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1'': $\mu \neq \mu_0$. Debe ser evidente cómo modificamos la prueba anterior para tal hipótesis alternativa. Si consideramos H_1': $\mu < \mu_0$, rechazaríamos H_0 si $\bar{X} < C$ y la función OC se definiera por

$$L(\mu) = P(\bar{X} \geq C) = 1 - \Phi\left(\frac{C - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right).$$

Si consideramos H_1'': $\mu \neq \mu_0$, rechazaríamos H_0 cada vez que $|\bar{X} - \mu_0| > C$ y, por tanto, la función OC se definiría como

$$\begin{aligned} L(\mu) &= P(|\bar{X} - \mu_0| \leq C) \\ &= \Phi\left(\frac{C + \mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{-C + \mu_0 - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right). \end{aligned}$$

Si escogemos el *mismo* nivel de significación α para cada una de las pruebas anteriores y dibujamos las gráficas de las respectivas funciones OC en el mismo sistema de coordenadas, obtenemos lo siguiente (A corresponde a H_1, B a H_1' y D a H_1''):

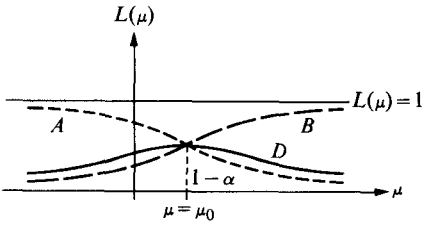


FIGURA 15.5

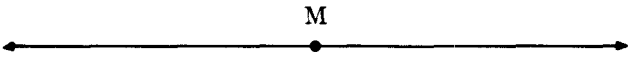
La figura 15.5 nos da un medio para comparar las tres pruebas que estamos considerando. Todas las pruebas tienen el mismo nivel de significación. (Debe comprenderse claramente que C es sólo un símbolo genérico para una constante y no será la misma en todos los casos. Lo importante es que en cada uno de ellos se ha escogido C de modo que la prueba tenga el nivel de significación α.)

Si $\mu > \mu_0$, entonces la prueba A es mejor que las otras dos, puesto que dará un valor más pequeño para la probabilidad de un error del tipo 2. Sin embargo, si $\mu < \mu_0$, la prueba A es la peor de las que se están considerando, mientras que la prueba B es la mejor. Finalmente, la prueba D es aceptable en general y aún puede ser mejorada en cualquier caso específico con la prueba A o la prueba B. Por tanto, obsérvese que es muy importante tener en mente una hipótesis alternativa específica, debido a que la prueba que escojamos puede depender de esto. (Sólo

comparamos las pruebas que tienen el mismo nivel de significación; esto no es necesario en absoluto y la comparación resulta algo vaga si usamos pruebas que tienen niveles de significación diferentes. Nótese la semejanza con nuestra comparación de ciertos estimados: sólo comparamos las varianzas de los estimados que eran insesgados.

En muchos casos es evidente cuál hipótesis alternativa deberíamos considerar. En el caso anterior, por ejemplo, posiblemente sabemos que el nuevo proceso de fabricación produciría pinzas con la *misma* durabilidad o más y, por tanto, usaríamos la prueba A como sugeríamos. (Si el nuevo proceso produjera pinzas de calidad inferior, nuestra prueba sería muy mala). Si no se garantiza ninguna de tales hipótesis sería mejor usar una prueba tal como D: rechazar H_0 si $|\overline{X} - \mu_0| > C$. Las pruebas como A y B se llaman pruebas *unilaterales*, mientras que una prueba como D se llama prueba *bilateral*.

Al considerar hipótesis alternativas podríamos encontrar la siguiente analogía útil. Supóngase que una persona se pierde de un lugar M y *sabemos* que el individuo ha ido o bien a la izquierda o a la derecha de M, manteniéndose en una trayectoria rectilínea.



Si 10 personas están disponibles para la búsqueda, ¿cómo deberían dispersarse?. Sí nada se sabe con relación a la ubicación del individuo, podría ser razonable enviar un grupo de 5 personas en cada una de esas direcciones, luego despachar un grupo de búsqueda muy efectivo, pero no muy fuerte, tanto a la izquierda como a la derecha. Sin embargo, si hay algún indicio de que la persona ha caminado a la izquierda, entonces posiblemente todos, o la mayor parte de los hombres disponibles, deberían ser enviados a la izquierda, haciendo una búsqueda muy efectiva, pero ineficaz a la derecha. Otras consideraciones podrían también influir en el uso de los recursos disponibles. Por ejemplo, supóngase que la trayectoria a la izquierda conduce a un terreno plano con bosque, mientras que la trayectoria a la derecha sigue el borde de un precipicio profundo. Es obvio que en este caso la mayor búsqueda se concentraría a la derecha, debido a que las probabilidades de estar perdido de este lado son mucho mayores que las de la izquierda.

La analogía debería ser evidente. Al probar hipótesis también debemos interesarnos en las consecuencias de nuestra decisión para rechazar o aceptar H_0. Por ejemplo, ¿es tan importante el error que cometemos

al aceptar algunas pinzas que son de mala calidad (creyendo que no lo son), como no aceptar las pinzas que son de buena calidad (creyendo que no lo son)?

Observación: En la formulación anterior sugerimos que a menudo preasignamos el nivel de significación de la prueba. Esto se hace frecuentemente; sin embargo, existe otro planteamiento del problema que es muy común y que deberemos analizar.

Volvamos al ejemplo 15.1, donde probamos H_0: $\mu = 100$ contra H_1: $\mu > 100$. Supóngase que sólo obtenemos una muestra de tamaño 50, calculamos el promedio muestral $\overline{X}$ y encontramos que es igual a 100.87. ¿Deberíamos aceptar o rechazar H_0? Podemos argumentar como sigue: si $\mu = 100$, entonces $\bar{X}$ tiene distribución $N(100, \frac{9}{50})$. Así, podemos calcular,

$$P(\bar{X} \geq 100.87) = P\left(\frac{\bar{X} - 100}{3}\sqrt{50} \geq \frac{100.87 - 100}{3}\sqrt{50}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2.06) = 0.019699.$$

Puesto que $0.01 < 0.019699 < 0.05$, diremos que el valor observado $\bar{X}$ es significativo al nivel del 5%, pero no al nivel del 1%. Es decir, si usamos $\alpha = 0.05$, rechazaríamos H_0, mientras, que al mismo tiempo, si usamos $\alpha = 0.01$, no deberíamos rechazar H_0.

Por decirlo de modo diferente, si $\mu = 100$, obtenemos un resultado que ocurrirá sólo alrededor del 1.9% de las veces. Si creemos que para aceptar H_0 un resultado debería tener por lo menos una probabilidad de ocurrir de 0.05, entonces la rechazamos. Si estamos satisfechos con una probabilidad de 0.01 la aceptamos.

Observación: La prueba anterior estipuló que H_0 debería ser rechazada siempre que $\bar{X} > C$. Suponiendo que el tamaño muestral $n = 2$, el criterio anterior se reduce a $(X_1 + X_2)/2 > C$ o, equivalentemente, $(X_1 + X_2) > k$. Luego, el conjunto de valores muestrales posibles (x_1, x_2) se ha dividido en dos regiones: $R = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 > k\}$ y $\bar{R}$.

La región específica R depende por supuesto, del valor de k, que a su vez depende del nivel de significación de la prueba R, la región de rechazo, que algunas veces se llama *región crítica* de la prueba. (Véase la Fig. 15.6.)

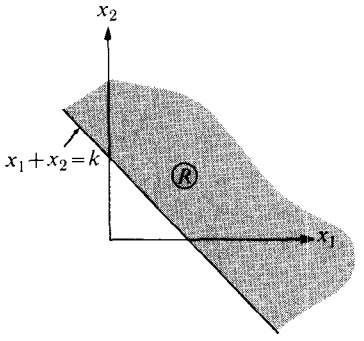


FIGURA 15.6

En general, una prueba puede describirse en términos de su región crítica R. Es decir, rechazamos H_0 si y sólo si $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

15.3 Ejemplos adicionales

En vez de formular una teoría general para la prueba de hipótesis que existe y es muy extensa), consideraremos algunos ejemplos. En cada uno de los casos, la prueba que propondremos será intuitivamente atractiva. No se hará ningún esfuerzo para indicar que una prueba especial es mejor en algún sentido.

EJEMPLO 15.2. Se comparan dos procesos de producción. El resultado del proceso A puede caracterizarse como una variable aleatoria X con distribución $N(\mu_x, \sigma_x^2)$, mientras que el resultado del proceso B puede caracterizarse como una variable aleatoria Y con distribución $N(\mu_y, \sigma_y^2)$. Supondremos que se *conoce* la variabilidad intrínseca en cada uno de los procesos, medida por la varianza. Deseamos probar las hipótesis H_0: $\mu_x = \mu_y$, contra la hipótesis alternativa H_1: $\mu_x - \mu_y > 0$.

Obtenemos una muestra de tamaño n de X, digamos $X_1, \ldots, X_n$, y una muestra de tamaño m de Y, sea $Y_1, \ldots, Y_m$. Calculemos los respectivos promedios muestrales $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ y propongamos la prueba siguiente para probar las hipótesis anteriores.

Rechazamos H_0 si $\bar{X} - \bar{Y} > C$, donde C es una constante escogida de modo que la prueba tenga un nivel de significación específico igual a α.

La variable aleatoria $Z = [(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_x - \mu_y)] / \sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}$ tiene distribución $N(0,1)$. Definiendo $\mu = \mu_x - \mu_y$, podemos expresar la

función OC de la prueba anterior como una función de μ, de la manera siguiente:

$$L(\mu) = P(\bar{X} - \bar{Y} \leq C|\mu) = P\left(Z \leq \frac{C-\mu}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}\right)$$

Ahora $\mu_x = \mu_y$ es equivalente a $\mu = 0$. Por lo tanto, para determinar C debemos resolver la ecuación

$$L(0) = 1 - \alpha$$

o

$$1 - \alpha = \Phi\left(\frac{C}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}\right).$$

Por lo tanto,

$$K_{1-\alpha} = \frac{C}{\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}}.$$

donde K_α está definida, como antes, por la relación $\alpha = (1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{K_\alpha} e^{-t^2/2}dt$. Luego,

$$C = K_{1-\alpha}\sqrt{\sigma_x^2/n + \sigma_y^2/m}$$

(No intentaremos resolver el problema de determinar óptimamente n y m. Una exposición de este problema se encuentra en Derman y Klein, *Probability and Statistical Inference for Engineers*, Oxford University Press, Nueva York, 1959.)

EJEMPLO 15.3. Un fabricante surte un pedido de fusibles, de los cuales el 90% aproximadamente funcionan bien. Se inicia un nuevo proceso con el objeto de aumentar la proporción de fusibles que funcionen bien. Así, deseamos probar la hipótesis H_0: $p = 0.90$ contra H_1: $p > 0.90$, donde p es la proporción de fusibles que funcionan correctamente. (Es decir,

estamos probando la hipótesis de que no ha ocurrido ninguna mejoría contra la hipótesis de que el nuevo proceso es superior.) Obtenemos una muestra de 50 fusibles fabricados con el nuevo proceso y contamos el número de fusibles que funcionan correctamente, digamos X. Propongamos la prueba siguiente:

Rechazar H_0 siempre que $X > 48$ y aceptarla en caso contrario.

Suponiendo que la variable aleatoria X tiene una distribución binomial con parámetro p (que es una suposición realista si la muestra se toma de un lote muy grande), obtenemos la siguiente expresión para la función OC

$$\begin{aligned} L(p) &= P(X \leq 48) = 1 - P(X \geq 49) \\ &= 1 - \sum_{k=49}^{50} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} = 1 - p^{49}(50 - 49p) \end{aligned}$$

después de algunas simplificaciones algebraicas. Por lo tanto, tenemos lo siguiente

a) $L(0) = 1$. *c*) $L'(p) < 0$ para toda $p, 0 < p < 1$.
b) $L(1) = 0$. *d*) $L''(p) = 0$ si $p = 48/49$.

[Las propiedades *c*) y *d*) se verifican fácilmente con una derivación directa.] Así, la gráfica de la anterior función L tiene la forma de la curva que se muestra en la figura 15.7. El nivel de significación α de esta prueba se obtiene al calcular $1 - L(0.9)$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - L(0.9) \\ &= (0.9)^{49}[50 - 44.1] \\ &= 0.034 \end{aligned}$$

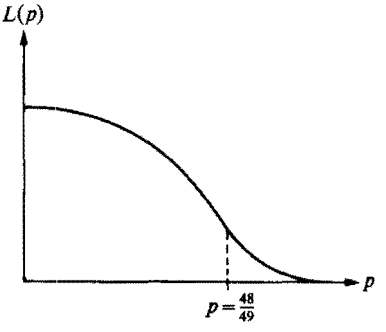


FIGURA 15.7

Observaciones: a) El ejemplo anterior se puede generalizar como sigue. Supóngase que X es una variable aleatoria distribuida binomialmente con base en

n repeticiones de un experimento con parámetro p. Para probar la hipótesis H_0: $p = p_0$ contra H_1: $p > p_0$, proponemos la prueba siguiente.

Rechazar H_0 siempre que $X > C$, donde C es una constante por determinar. (Por tanto, aceptar H_0 siempre que $X \leq C$.)

La función OC de esta prueba será de la forma

$$L(p) = \sum_{k=0}^{C} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{15.2}$$

Las siguientes propiedades de L se verifican fácilmente. (Véase el Prob. 15.5.)

1) $L(0) = 1; L(1) = 0$

2) $L'(p) < 0$ para toda p, $0 < p < 1$. (Por tanto, L es estrictamente decreciente.)

3) $L''(p) = 0$ si $p = C/(n-1)$. [Luego, L tiene un punto de inflexión en $C/(n-1)$.]

b) Hemos dicho que en algunos casos podemos aproximar la distribución binomial con la distribución de Poisson. Es decir, si n es grande y p es pequeña, $P(X = k) \simeq e^{-np}(np)^k/k!$ Usando esta fórmula de $P(X = k)$, encontramos que la función OC para la prueba propuesta anteriormente se reduce a

$$R(p) = \sum_{k=0}^{C} \frac{e^{-np}(np)^k}{k!}. \tag{15.3}$$

Las propiedades siguientes de R también se pueden verificar con facilidad. (Véase el Prob. 15.6.)

4) $R(0) = 1$; $R(1) = 0$

5) $R'(p) < 0$ para toda p, $0 < p < 1$.

6) $R''(p) = 0$ si $p = C/n$.

7) $R(C/n)$ es una función solamente de C y no de n.

Reconsideremos el problema de probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu > \mu_0$, donde X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Previamente suponíamos que σ^2 era conocida. Eliminemos ahora esta restricción.

Nuestra prueba anterior rechazaba H_0 siempre que $(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma > C$; C estaba determinada considerando el hecho de que $(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma$ tiene distribución $N(0, 1)$ si $\mu = \mu_0$.

Tal como construimos un intervalo de confianza para μ cuando σ^2 era desconocida, estimemos ahora σ^2 a partir de $\hat{\sigma}^2 = [1/(n-1)] \sum_{i=1}^{n} (X_i -$

$\bar{X})^2$. Usemos una prueba análoga a la propuesta anteriormente: rechacemos H_0 siempre que $(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}/\hat{\sigma} > C$. Para determinar C usemos el hecho de que $(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\hat{\sigma}$ tiene una distribución t de Student con $(n-1)$ grados de libertad si $\mu = \mu_0$. (Véase el Teorema 14.3.)

Sea α el nivel de significación prefijado. Luego, $\alpha = P[(\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\hat{\sigma} > C]$ implica que $C = t_{n-1,1-\alpha}$, se obtiene de la tabla de la distribución t de Student. (Véase la Fig. 15.8.) Rechazamos H_0 cada vez que $\bar{X} > \hat{\sigma} t_{n-1,1-\alpha} n^{-\frac{1}{2}} + \mu_0$, así obtenemos nuestra prueba.

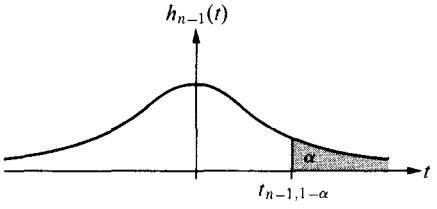


FIGURA 15.8

EJEMPLO 15.4. Supóngase que X, la precipitación pluvial anual en cierta zona, está distribuida normalmente con $E(X) = 30.0$ pulgadas. (Este valor se ha establecido de un gran registro histórico de datos meteorológicos.) En años recientes, parece evidente que ciertos cambios climatológicos afectan, en otras cosas, la precipitación anual. Se establece la hipótesis de que de hecho la precipitación anual ha aumentado. En particular deseamos probar H_0: $\mu = 30.0$ contra H_1: $\mu > 30.0$. La varianza se supone desconocida, puesto que los cambios climatológicos sugeridos también pueden afectar la variabilidad de la lluvia caída, y, por tanto, los datos anteriores sobre la varianza no son significativos.

Supongamos que en los ocho años anteriores se ha registrado la siguiente precipitación anual (pulgadas):

$$34.1,\ 33.7,\ 27.4,\ 31.1,\ 30.9,\ 35.2,\ 28.4,\ 32.1.$$

Cálculos directos que dan $\bar{X} = 31.6$ y $\hat{\sigma}^2 = 7.5$. De la tabla de la distribución t encontramos que

$$t_{7,0.95} = 1.89.$$

Luego,

$$\hat{\sigma} t_{7,0.95}/\sqrt{8} + 30.0 = 31.8 > 31.6$$

Por tanto, no rechazamos H_0 al nivel de significación de 0.05.

15.4 Prueba para la bondad de ajuste

En la mayoría de nuestras exposiciones supusimos que la variable aleatoria considerada tiene una distribución específica. En el capítulo anterior y en las primeras secciones de éste aprendimos cómo resolver el problema de tener un parámetro desconocido asociado con una distribución de probabilidades.

Sin embargo, puede suceder que aún no estemos seguros sobre la forma general de la distribución que se tiene. Consideremos algunos ejemplos.

EJEMPLO 15.5. Unos buques mercantes de cierto tipo estuvieron expuestos durante 400 días a riesgos de accidentes por tormentas, hielo, incendio, encallamiento, avería de máquinas, etc. El número de accidentes, digamos X, de cada barco, puede considerarse como una variable aleatoria. Se registraron los siguientes datos:

Número de accidentes (X):	0	1	2	3	4	5	6
Número de barcos con X accidentes:	1448	805	206	34	4	2	1

Los datos anteriores ¿justifican que X tiene una distribución de Poisson?

EJEMPLO 15.6. Supóngase que se tienen 20 muestras de un tipo especial de cables y que las resistencias se miden en ohms. Se obtienen los valores siguientes:

$$9.8, 14.5, 13.7, 7.6, 10.5, 9.3, 11.1, 10.1, 12.7, 9.9,$$
$$10.4, 8.3, 11.5, 10.0, 9.1, 13.8, 12.9, 10.6, 8.9, 9.5.$$

Si R es la variable aleatoria de la cual se obtiene la muestra anterior, ¿tenemos razón al suponer que R está distribuida normalmente?

EJEMPLO 15.7. Se prueban 20 tubos electrónicos y se anota la duración de cada uno de ellos (en horas):

$$7.2, 37.8, 49.6, 21.4, 67.2, 41.1, 3.8, 8.1, 23.2, 72.1,$$
$$11.4, 17.5, 29.8, 57.8, 84.6, 12.8, 2.9, 42.7, 7.4, 33.4.$$

Los datos anteriores ¿son consistentes con la hipótesis de que T, la variable aleatoria con la que se está haciendo el muestreo, está distribuida exponencialmente?

Los ejemplos anteriores son típicos de una gran clase de problemas que aparecen con frecuencia en aplicaciones. Hay varias técnicas estadísticas con las cuales se pueden analizar tales problemas; a continuación consideraremos algunas de ellas.

El problema de probar la hipótesis de que una variable aleatoria tiene cierta distribución específica puede considerarse como un caso especial del siguiente problema general.

Considérese nuevamente las condiciones que dan origen a la distribución multinomial (véase la Sec. 8.8). Un experimento ε se efectúa n veces. Cada una de las repeticiones de ε da como resultado uno y sólo uno de los eventos A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Supóngase que $P(A_i) = p_i$. Sea n_i el número de veces que ocurre A_i entre las n repeticiones de ε, $n_1 + \cdots + n_k = n$.

Deseamos probar la hipótesis H_0: $p_i = p_{io}$, $i = 1, \ldots, k$, donde p_{io} es un valor específico. Karl Pearson (1900) introdujo la siguiente prueba de "bondad de ajuste" para probar la hipótesis anterior:

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ siempre que } D^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_{io})^2}{np_{io}} > C, \qquad (15.4)$$

donde C es una constante que se va a determinar.

Observaciones: a) Puesto que $E(n_i) = np_{io}$ si $p_i = p_{io}$, este criterio para probar tiene un considerable atractivo intuitivo. Exige que rechacemos H_0 siempre que la discrepancia entre los valores observados n_i y los valores esperados np_{io} sea "muy grande". Algunas veces el estadístico D^2 anterior se escribe de manera muy sugerente como $\sum_{i=1}^{k}(o_i - e_i)^2/e_i$, donde o_i y e_i representan, respectivamente, el valor observado y esperado de n_i.

b) Es importante establecer que D^2 es un estadístico (es decir, una función de los valores observados $n_i, \ldots, n_k$) y es, por tanto, una variable aleatoria. En realidad, D^2 es una variable aleatoria discreta que toma un gran número finito de valores. La distribución actual de D^2 es muy complicada. Por fortuna, hay una aproximación disponible para la distribución de D^2, válida si n es grande, y que hace muy útil el procedimiento sugerido.

Teorema 15.1. Si n es suficientemente grande, y si $p_i = p_{io}$, la distribución de D^2 tiene en forma aproximada la distribución χ-cuadrada con $(k-1)$ grados de libertad.

Demostración: El argumento siguiente *no* es una demostración rigurosa. Sólo es un intento de hacer plausible el resultado.

Consideremos un caso especial, es decir, $k = 2$. Entonces,

$$D^2 = \frac{(n_1 - np_{1o})^2}{np_{1o}} + \frac{(n_2 - np_{2o})^2}{np_{2o}}.$$

Usando el hecho que $n_1 + n_2 = n$ y que $p_{1o} + p_{2o} = 1$, podemos escribir

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{(n_1 - np_{1o})^2}{np_{1o}} + \frac{(n - n_1 - n(1-p_{1o}))^2}{np_{2o}} \\ &= \frac{n_1 - np_{1o})^2}{np_{1o}} + \frac{(n_1 - np_{1o})^2}{np_{2o}} = (n_1 - np_{1o})^2 \left[\frac{1}{np_{1o}} + \frac{1}{np_{2o}}\right] \\ &= (n_1 - np_{1o})^2 \left[\frac{np_{2o} + np_{1o}}{n^2 p_{1o} p_{2o}}\right] = \frac{(n_1 - np_{1o})^2}{np_{1o}(1-p_{1o})}. \end{aligned}$$

Ahora $n_1 = \sum_{j=1}^{n} Y_{1j}$, donde

$$\begin{aligned} Y_{1j} &= 1 \qquad \text{si } A_1 \text{ocurre en la } j\text{-ésima repetición,} \\ &= 0 \qquad \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Así, n_1 puede expresarse como la suma de n variables aleatorias independientes y de acuerdo con el teorema del límite central, tiene aproximadamente una distribución normal si n es grande. Además, $E(n_1) = np_{1o}$ y $V(n_1) = np_{1o}(1-p_{1o})$ si p_{1o} es el valor verdadero de p_1. Por tanto, si $p_1 = p_{1o}$, entonces para n grande la variable aleatoria $(n_1 - np_{1o})/\sqrt{np_{1o}(1-p_{1o}}$ tiene aproximadamente la distribución $N(0,1)$. Luego, de acuerdo con el teorema 10.8 para una n grande, la variable aleatoria

$$\left[\frac{n_1 - np_{1o}}{\sqrt{np_{1o}(1-p_{1o})}}\right]^2$$

tiene aproximadamente la distribución χ_1^2.

Hemos demostrado que si n es suficientemente grande, D^2 (con $k = 2$) tiene aproximadamente la distribución χ_1^2. Pero precisamente esto es lo que sosteníamos en el teorema. La demostración para una k en general sigue la misma línea: debemos demostrar que D^2 puede expresarse como la suma de cuadrados de $(k - 1)$ variables aleatorias independientes, cada una con distribución $N(0, 1)$ si n es grande, y si $p_i = p_{io}$ y, recurriendo al teorema 10.8, encontramos que se deduce el resultado anterior.

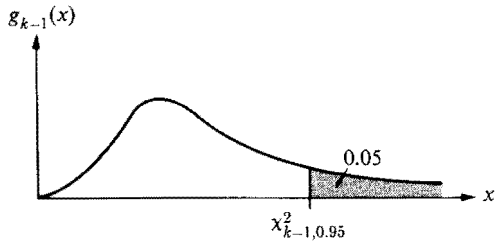


FIGURA 15.9

Podemos usar el resultado ya establecido para responder a la pregunta "cuán grande" debería ser D^2 a fin de rechazar la hipótesis H_0: $p_i = p_{io}$.

Supóngase que queremos obtener una probabilidad de un error del tipo I (es decir, el nivel de significación) igual a 0.05. Esto significa que esperamos rechazar H_0 alrededor del 5% de las veces, cuando en realidad H_0 es verdadero. Luego, elegimos C para satisfacer

$$P(D^2 > C|P_i = p_{io}) = 0.05.$$

Puesto que D^2 tiene distribución χ_{k-1}^2 si $p_i = p_{io}$, podemos obtener el valor de C de la tabla de la distribución χ-cuadrada; es decir $C = \chi^2_{k-1,\,0.95}$; donde $\chi^2_{k-1,\,0.95}$ está definida por la relación

$$\int_{\chi^2_{k-1,\,0.95}}^{\infty} g_{k-1}(x)dx = 0.05,$$

donde $g_{k-1}(x)$ es la fdp de una variable aleatoria con distribución χ_{k-1}^2. (Véase la Fig. 15.9.)

Usemos las ideas que desarrollamos para responder algunas preguntas planteadas al comienzo de esta sección: ¿cómo podemos encontrar una prueba para decidir si se acepta o se rechaza la hipótesis de que se

tomó una muestra particular de una variable aleatoria con una distribución específica?

En este punto debemos hacer una distinción entre los dos tipos de problemas. Simplemente podríamos formular la hipótesis de que la variable aleatoria que se muestrea tiene alguna distribución normal, sin especificar los parámetros implicados.

O podríamos ser más explícitos y formular la hipótesis de que la variable aleatoria que se considera tiene una distribución normal con promedio y varianza específicos. Los dos problemas pueden tratarse de manera semejante, pero el segundo (cuando especificamos *completamente* la distribución hipotética) es un poco más simple y lo consideraremos primero.

Caso 1. Prueba para una distribución completamente especificada.

EJEMPLO 15.8. Supóngase que creemos que la duración T de bombillas eléctricas está distribuida exponencialmente con parámetro $\beta = 0.005$. (Es decir, el tiempo esperado para que ocurra la falla es de 200 horas.) Sacamos una muestra de 150 bombillas, las probamos y anotamos el tiempo en que se queman, digamos $T_1, \ldots, T_{150}$. Consideremos los cuatro eventos mutuamente excluyentes:

$$A_1\colon\ 0 \leq T < 100; \qquad A_2\colon\ 100 \leq T < 200;$$
$$A_3\colon\ 200 \leq T < 300; \qquad A_4\colon\ T \geq 300.$$

Supóngase que registramos n_i, el número de veces (entre los 150 tiempos para que se presente la falla) que ocurrió el evento A_i, y encontramos $n_1 = 47, n_2 = 40, n_3 = 35$ y $n_4 = 28$. A fin de evaluar el estadístico D^2 debemos calcular p_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Ahora,

$$p_1 = P(T \leq 100) = 1 - e^{-0.005(100)} = 1 - e^{-0.5} = 0.39,$$
$$p_2 = P(100 \leq T < 200) = 1 - e^{-0.005(200)} - 0.39 = 0.24,$$
$$p_3 = P(200 \leq T < 300) = 1 - e^{-0.005(300)} - (1 - e^{-0.005(200)}) = 0.15,$$
$$p_4 = P(T > 300) = e^{-0.005(300)} = 0.22.$$

Ahora podemos calcular

$$D^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_{io})^2}{np_{io}}$$

$$= \frac{(47 - 58.5)^2}{58.5} + \frac{(40 - 36)^2}{36} \frac{(35 - 22.5)^2}{22.5} + \frac{(28 - 33)^2}{33} = 11.56.*$$

En las tablas de la distribución χ-cuadrada encontramos que $P(D^2 > 11.56) < 0.01$, donde D^2 tiene aproximadamente la distribución χ-cuadrada con $4 - 1 = 3$ grados de libertad. Por lo tanto, rechazaríamos (al nivel del 1%) la hipótesis de que los datos representan una muestra de una distribución exponencial con parámetro $\beta = 0.005$.

El ejemplo anterior ilustra el procedimiento general que usamos para probar la hipótesis de que $X_1, \ldots, X_n$ representa una muestra de una variable aleatoria con una distribución completamente especificada:

a) Dividir la recta real en k intervalos mutuamente excluyentes, $A_1, \ldots, A_k$.

b) Sea N_i el número de valores muestrales que caen en A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.

c) Sea $p_{io} = P(A_i)$. Esos valores se pueden calcular puesto que la hipótesis especifica completamente la distribución.

d) Calcular D^2 y rechazar la hipótesis si $D^2 > C$, donde C se obtiene de la tabla de la distribución χ-cuadrada. Si se requiere un nivel de significación α, $C = \chi^2_{k-1,1-\alpha}$.

Observación: No analizaremos como se deben escoger los intervalos A_i o cuántos deberían escogerse. Establezcamos sólo la regla siguiente: si $np_{io} < 5$ para cualquier A_i, combinar los datos con A_{i+1} o A_{i-1}. Es decir, no deseamos subdividir el espacio muestral de la variable aleatoria en partes tales que el número esperado de ocurrencias en cualquier subdivisión particular sea menor que 5. [Una exposición amena de este problema puede encontrarse en el artículo de W. G. Cochran titulado "The χ^2 -Test of Goodness of Fit" publicado en *Ann. Math. Stat.* **23**, 315–345 (1952).]

Caso 2. Prueba para una distribución si deben estimarse los parámetros.

**N. del E.* Un resultado más exacto de esta operación es 10.41.

En muchos problemas sólo tenemos razones para suponer que la variable aleatoria que se está muestreando tiene una distribución de cierto *tipo* sin que podamos especificar los parámetros. Por ejemplo, sabemos que ciertas hipótesis que hemos formulado pueden conducirnos a una distribución de Poisson, a una distribución exponencial, etc. A fin de aplicar la técnica sugerida en la sección anterior debemos *conocer* los valores de los parámetros de la distribución.

Si no conocemos esos valores, el planteamiento obvio es estimar primero los parámetros desconocidos, y luego usar esas *estimaciones* para evaluar las probabilidades p_i. Aparecen dos interrogantes.

a) ¿Cómo se deberían estimar los parámetros?

b) Si se usa $\hat{p}_i$(es decir, el parámetro estimado) en vez de p_{io} en la expresión de D^2, ¿cómo afecta esto la distribución de D^2? (El hecho de que afectará la distribución debe ser evidente si comprobamos que originalmente las p_{io} eran constantes, mientras que ahora las p_i son ellas mismas variables aleatorias, dando así una estructura mucho más complicada a la variable aleatoria D^2.)

Daremos (sin demostración) algunas respuestas a las interrogantes anteriores.

a) Los estimados usados normalmente para los parámetros son los que se obtienen por el método de la máxima verosimilitud.

b) Si el número de parámetros estimados es igual a $r < k$, entonces para una n grande, la variable aleatoria D^2 tiene otra vez una distribución χ-cuadrada, esta vez con $k - 1 - r$ grados de libertad.

Observación: Este último hecho es muy notable. Significa que D^2 tiene la misma distribución fundamental χ^2 que antes; la única diferencia es que se pierde un grado de libertad por cada parámetro que debe estimarse.

EJEMPLO 15.9. Considérense los datos del contenido de ceniza en el carbón como aparecen en el ejemplo 14.6. Supóngase que deseamos probar la hipótesis de que esos datos se obtuvieron de una variable aleatoria distribuida normalmente. Primero debemos estimar los parámetros correspondientes μ y σ^2.

Previamente obtuvimos los estimados **ML** $\hat{\mu} = 17.0$ y $\hat{\sigma}^2 = 7.1$. Dividamos los valores posibles de X en cinco categorías:

$$A_1\colon X < 12; \quad A_2\colon 12 \leq X < 15; \quad A_3\colon 15 \leq X < 18;$$
$$A_4\colon 18 \leq X < 21; \quad A_5\colon X \geq 21.$$

Sea n_i el número de veces que ocurre A_i. Encontramos que

$$n_1 = 7; \quad n_2 = 49; \quad n_3 = 109; \quad n_4 = 67; \quad n_5 = 18.$$

A continuación debemos calcular $p_i = P(A_i)$, usando los valores estimados de $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}^2$ ya obtenidos. Tenemos

$$\begin{aligned}
p_1 &= P(X < 12) = P\left(\frac{X-17}{2.7} < \frac{12-17}{2.7}\right) = \Phi(-1.85) = 0.03,\\
p_2 &= P(12 \le X < 15) = \Phi(-0.74) - \Phi(-1.85) = 0.20,\\
p_3 &= P(15 \le X < 18) = \Phi(0.37) - \Phi(-0.74) = 0.41,\\
p_4 &= P(18 \le X < 21) = \Phi(1.48) - \Phi(0.37) = 0.29,\\
\hat{p}_5 &= P(X \ge 21) = 1 - \Phi(1.48) = 0.07.
\end{aligned}$$

Ahora podemos evaluar

$$\begin{aligned}
D^2 &= \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - 250\hat{p}_i)^2}{250\hat{p}_i}\\
&= \frac{(7-7.5)^2}{7.5} + \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(109-102.5)^2}{102.5}\\
&\quad + \frac{(67-72.5)^2}{72.5} + \frac{(18-17.5)^2}{17.5}\\
&= 0.82.
\end{aligned}$$

Puesto que D^2 tiene $5 - 1 - 2 = 2$ grados de libertad, en las tablas de la distribución χ-cuadrada encontramos que $P(D^2 \ge 0.82) \simeq 0.65$ y que, por tanto, deberíamos aceptar la hipótesis de normalidad.

EJEMPLO 15.10. Consideremos los datos presentados en el ejemplo 15.5. ¿Tiene la variable aleatoria X, es decir, el número de accidentes durante el periodo especificado de 400 días, una distribución de Poisson?

Estimemos primero el parámetro λ de la distribución. En el capítulo 14 encontramos que el estimado **ML** de λ está dado por el promedio muestral. Así,

$$\hat{\lambda} = \frac{0(1448) + 1(805) + 2(206) + 3(34) + 4(4) + 5(2) + 6(1)}{1448 + 805 + 206 + 34 + 4 + 2 + 1}$$

$$= \frac{1351}{2500}$$

$$= 0.54.$$

Sea A_1: $X = 0$; A_2: $X = 1$; A_3: $X = 2$; A_4: $X = 3$; A_5: $X =\geq 4$.. Luego, $n_1 = 1448$; $n_2 = 805$; $n_3 = 206$; $n_4 = 34$; $n_5 = 7$, y obtenemos

$$\hat{p}_1 = P(X = 0) = e^{-(0.54)} = 0.58 \qquad \text{y } n\hat{p}_1 = 1450$$

$$\hat{p}_2 = P(X = 1) = e^{-0.54}(0.543) = 0.31 \qquad \text{y } n\hat{p}_2 = 775$$

$$\hat{p}_3 = P(X = 2) = e^{-0.54}\frac{(0.543)^2}{2} = 0.08 \qquad \text{y } n\hat{p}_3 = 200$$

$$\hat{p}_4 = P(X = 3) = e^{-0.54}\frac{(0.543)^3}{6} = 0.01 \qquad \text{y } n\hat{p}_4 = 25$$

$$\hat{p}_5 = P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 0.02 \qquad \text{y } n\hat{p}_5 = 50$$

Ahora podemos evaluar

$$D^2 + \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - np_i)^2}{n\hat{p}_i} = \frac{(1448 - 1450)^2}{1450} = \frac{(805 - 775)^2}{775}$$

$$+ \frac{(206 - 200)^2}{200} + \frac{(34 - 25)^2}{25} + \frac{(7 - 50)^2}{50} = 42.2.$$

Puesto que hay cinco categorías y estimábamos un parámetro, la variable aleatoria D^2 tiene la distribución aproximada χ^2_3. En las tablas de la distribución χ-cuadrada encontramos que $P(D^2 \geq 42.2) \simeq 0$ y, por tanto, deberíamos rechazar la hipótesis.

PROBLEMAS

15.1. Suponer que X tiene distribución $N(\mu, \sigma^2)$ con σ^2 conocida. Para probar H_0: $\mu = \mu_0$ contra H_1: $\mu < \mu_0$ se propone el método siguiente: obtener una muestra de tamaño n y rechazar H_0 siempre que el promedio muestral $\bar{X} < C$, donde C es una constante que debe determinarse.

a) Obtener una expresión para la función OC, $L(\mu)$ en términos de la distribución normal tabulada.

b) Si el nivel de significación de la prueba es $\alpha = 0.01$, obtener una expresión para C.

c) Supóngase que $\sigma^2 = 4$ y que se está probando H_0: $\mu = 30$ contra H_1: $\mu < 30$. Determinar el tamaño muestral n y la constante C a fin de satisfacer las condiciones $L(30) = 0.98$ y $L(27) = 0.01$.

d) Supóngase que se obtienen los siguientes valores muestrales de X:

$$27.1; 29.3; 31.5; 33.0; 30.1; 30.9; 28.4; 32.4; 31.6; 28.9; 27.3; 29.1.$$

¿Rechazaría H_0 contra H_1 como se estableció en *c*) al nivel de significación del 5%?

15.2. Considerar la situación descrita en el problema 15.1, excepto que la hipótesis alternativa es de la forma H_1: $\mu \neq \mu_0$. Por tanto, rechazamos H_0 siempre que $|\bar{X} - \mu_0| > C$. Responder las preguntas *a*) y *b*) anteriores.

15.3. Supóngase que X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ. Para probar H_0: $\lambda = \lambda_0$ contra H_1: $\lambda > \lambda_0$ se propone la siguiente prueba. Obtener una muestra de tamaño n, calcular el promedio muestral $\bar{X}$ y rechazar H_0 siempre que $\bar{X} > C$, donde C es una constante que se debe determinar.

a) Obtener una expresión para la función OC de la prueba anterior, digamos $L(\lambda)$. [*Indicación:* Usar la propiedad reproductiva de la distribución de Poisson.]

b) Hacer la gráfica de la función OC.

c) Supóngase que se prueba H_0: $\lambda = 0.2$ contra H_1: $\lambda > 0.2$. Se obtiene una muestra de tamaño $n = 10$ y rechazamos H_0 si $\bar{X} > 0.25$. ¿Cuál es el nivel de significación de esta prueba?

15.4. Establecer las propiedades de la ecuación (15.1) para la función OC, $L(\mu) = \Phi[(C - \mu)\sqrt{n}/\sigma]$.

15.5. Verificar las propiedades para la función OC, $L(p)$, como se definieron en la ecuación (15.2).

15.6. Verificar las propiedades para la función OC, $R(p)$, como se definieron en la ecuación (15.3).

15.7. Se sabe que una gran remesa de voltímetros contiene cierta proporción digamos p, de defectuosos. Para probar H_0: $p = 0.2$ contra H_1: $p > 0.2$ se usa el siguiente método. Se obtiene una muestra de tamaño 5 y se cuenta X, el número de voltímetros defectuosos. Si $X \leq 1$, se acepta H_0, si $X > 4$, se rechaza H_0; y si $\bar{X} = 2, 3$ o 4 se obtiene una segunda muestra de tamaño 5. Sea Y el número de instrumentos defectuosos en la segunda muestra. Se rechaza H_0 si $Y \geq 2$ y se acepta en caso contrario. (Se supone que el lote muestreado es suficientemente grande de modo que pueda suponerse que X y Y son variables aleatorias independientes distribuidas binomialmente.)

a) Obtener una expresión para $L(p)$, la función OC de la prueba anterior, y dibujar su gráfica.

b) Encontrar el tamaño de la prueba anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de un error del tipo 2 si $p = 0.5$?

15.8. Si $n = 4$ y $k = 3$, ¿cuántos valores posibles puede tomar la variable aleatoria D^2, como se definió en la ecuación (15.4)?

15.9. *a*) Calcular el valor esperado de la variable aleatoria D^2, como se definió en la ecuación (15.4).

b) ¿Cómo se compara este valor con el valor esperado (asintótico) de D^2 obtenido con la distribución χ-cuadrada que puede usarse para aproximar la distribución de D^2 cuando n es grande?

15.10. Mediante un nuevo proceso se preparan tres clases de lubricantes. Cada uno de los lubricantes se prueba con cierto número de máquinas, y luego el resultado se clasifica como aceptable. Los datos de la tabla 15.1 representan los resultados de este experimento. Probar la hipótesis de que la probabilidad p de que un lubricante tenga un resultado aceptable es la *misma* para los tres lubricantes. [*Indicación:* Estimar primero p de la muestra.]

TABLA 15.1

	Lubricante 1	Lubricante 2	Lubricante 3
Aceptable	144	152	140
Inaceptable	56	48	60
Total	200	200	200

15.11. Al usar varias leyes de falla se ha encontrado que la distribución exponencial desempeña un papel muy importante y que, por tanto, interesa poder decidir si una muestra particular de tiempos para que se presente una falla proviene de una distribución exponencial básica. Supóngase que se han probado 335 bombillas y el resumen siguiente de su duración T (en horas) está disponible:

Duración (en horas)	$0 \leq T < 100$	$100 \leq T < 200$	$200 \leq T < 300$	$300 \leq T < 400$	$T \geq 400$
Número de bombillas	82	71	68	62	52

De los tiempos registrados para que ocurra la falla, se encontró que $\bar{T}$, el promedio muestral, era igual a 123.5 horas. Usando esta información, probar

la hipótesis de que T, el tiempo para que ocurra la falla, está distribuido exponencialmente.

15.12. Supóngase que la variable aleatoria X tiene la siguiente fdp:

$$f(x) = \frac{\alpha \cos \alpha x}{\operatorname{sen}(\pi/2)\alpha}, \quad 0 < x < \pi/2, \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1.$$

Para probar H_0: $\alpha = \alpha_0$ se propone la siguiente prueba. Obtener una observación de X, sea X_1, y rechazar H_0 si $X_1 > 1$.

a) Obtener una expresión para la función OC, $L(\alpha)$, de esta prueba y hacer su gráfica.

b) ¿Cuál es el tamaño de esta prueba si $\alpha_0 = \pi/4$?

15.13. En una malla de 165 celdas, se contó el número de granos de grafito en cada celda. Así se obtuvieron los datos de la tabla 15.2. Probar la hipótesis de que el número de granos en cada una de las celdas es una variable aleatoria con una distribución de Poisson. [*Sugerencia:* Reunir las observaciones ≤ 2 y también aquellas ≥ 10.]

TABLA 15.2

Número de granos de grafito por celda	Observados	Número de granos de grafito por celda	Observados
0	1	7	17
1	1	8	22
2	5	9	21
3	7	10	4
4	20	11	2
5	34	12	1
6	30		

Referencias

La siguiente lista de referencias, de ningún modo es exhaustiva, permite brindar al lector interesado la oportunidad de encontrar diversas lecturas suplementarias y complementarias sobre los diversos temas que se presentan en el texto. Además de encontrar varios temas que no se incluyen en esta presentación, el lector encontrará otros tratados con mayor detalle o desde un punto de vista un tanto diferente.

Además de tomar nota de los textos que figuran a continuación, el lector deberá estar consciente de ciertas revistas profesionales en las cuales se hacen contribuciones importantes. Muchas de esas revistas, por supuesto, son escritas por personas que poseen una experiencia y dominio del tema considerablemente mayores que las que pueden obtenerse estudiando un semestre. Sin embargo, varias de ellas en ocasiones contienen artículos muy claros y al alcance del estudiante que ha dominado la materia de este texto; entre éstas están *Journal of the American Statistical Association y Technometrics*. La última, de hecho se subtitula "A Journal of Statistics for the Physical, Chemical, and Engineering Sciences", y, por lo tanto, pueden ser de interés particular para aquellos estudiantes a quienes está especialmente dedicado este texto.

Muchos de los libros listados contienen análisis de la mayoría de los temas incluidos en este texto. No obstante, algunas de las referencias son más especializadas y particularmente pertinentes sólo para algunos capítulos. En tales casos, los capítulos específicos figuran entre paréntesis después de las referencias.

En inglés:

BAZOVSKY, I., *Reliability Theory and Practice*, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice–Hall, Inc., 1961 (11).

BERMAN, SIMEON M., *The Elements of Probability*, Reading, Mass., Addison–Wesley Publishing Co., Inc., 1969.

BOWKER, A. H. Y G. J. LIEBERMAN, *Engineering Statistics,* Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice Hall, Inc., 1959.

DERMAN, C. Y M. KLEIN, *Probability and Statistical Inference for Engineers,* Nueva York, Oxford University Press, 1959.

EHRENFELD, S. Y S. B. LITTAUER, *Introduction to Statistical Method,* Nueva York, McGraw–Hill Book Co., 1964.

FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* vol. 1, 3a. ed., Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1968 (1, 2, 3).

FREUND, J. E., *Mathematical Statistics,* Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice–Hall, Inc., 1962.

FRY, T. C., *Probability and Its Engineering Uses,* 2a. ed., Princeton, Nueva Jersey, D. Van Nostrand, 1964.

GNEDENKO, B. V., *The Theory of Probability* (traducción del ruso), Nueva York, Chelsea Publishing Co., Inc., 1962.

GUTTMAN, I. Y S. S. WILKS, *Introductory Engineering Statistics,* Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1965.

HABER, A., R. P. RUNYON Y P. BADIA, *Readings in Statistics,* Reading, Mass., Addison–Wesley Publishing Co., Inc., 1970.

LINDGREN, B. W., *Statistical Theory,* 2a. ed., Nueva York, the Macmillan Co., 1968.

LINDGREN, B. W. Y G. W. MCELRATH, *Introduction to Probability and Statistics,* 3a. ed., Nueva York, The Macmillan Co., 1969 (13, 14, 15).

LLOYD, D. K. Y M. LIPOW, *Reliability: Management, Methods, and Mathematics,* Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice–Hall, Inc., 1962 (11).

MCCORD, J. R., III Y R. M. MORONEY, JR., *Introduction to Probability Theory,* Nueva York, the Macmillan Co., 1964.

MILLER, I. Y J. E. FREUND, *Probability and Statistics for Engineers,* Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice–Hall, Inc., 1965.

MOOD, A. M. Y F. A. GRAYBILL, *Introduction to the Theory of Statistics,* 2a. ed., Nueva York, McGraw–Hill Book Co., 1963.

PARZEN, E., *Modern Probability Theory and Its Applications,* Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1960

WADSWORTH, B. P. Y J. G. BRYAN, *Introduction to Probability and Random Variables,* Nueva York, McGraw–Hill Book Co., 1960.

En español:

A continuación se presenta una lista de libros en español para beneficio del estudiante y del lector en general que deseen investigar algunos de los temas tratados en este libro y, en especial, algunas áreas particulares. (N. del T.)

ARLEY, NIELS Y RANDER BUCH, *Introducción a la teoría de la probabilidad y de la estadística*, Madrid, Alhambra, 1968.

CARRANZA, ROQUE, *Probabilidad y estadística*, Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1965.

CRAMER, HARALD, *Métodos matemáticos de estadística*, Madrid, Aguilar, 1968.

DIXON, JOHN, *Introducción a la probabilidad*, México, Limusa–Wiley, 1970.

DIXON, WILFRID Y FRANK MASSEY, *Introducción al análisis estadístico*, Madrid, Ediciones del Castillo, 1965.

FREEMAN, HAROLD A., *Introducción a la inferencia estadística*, México, Trillas, 1970.

GNEDENKO, B. V. Y A. I. JINCHIN, *Introducción al cálculo de probabilidades* (traducción del ruso), Buenos Aires, Eudeba, 1971.

GUENTHER, WILLIAM, *Introducción a la inferencia estadística*, Nueva York, McGraw–Hill, 1965.

HOEL, PAUL, *Introducción a la estadística matemática*, Barcelona, Ariel, 1968.

LIPSCHUTZ, SEYMOUR, *Probabilidad*, México, McGraw–Hill, 1970.

MAISEL, LOUIS, *Probabilidad y estadística*, Bogotá, Fondo Educativo Interamericano, S. A., 1973.

RÍOS, SIXTO, *Métodos estadísticos*, 5a. ed., Nueva York, McGraw–Hill, 1967.

Apéndice

TABLA 1. Valores de la función distribución normal estándar*

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = P(Z \leq z)$$

z	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
-3.0	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0238	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0300	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0570	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2297	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

*B.W. Lindgren, *Statistical Theory*, Nueva York, The Macmillan Co., 1960.

TABLA 1. *(Continuación)*

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = P(Z \leq z)$$

z	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9430	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

TABLA 2. Función de la distribución binomial

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$n = 10$ $x = 10$	$n = 10$ $x = 9$	$n = 10$ $x = 8$	$n = 10$ $x = 7$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.01
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.02
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.03
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.04
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.05
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000003	0.06
0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.07
0.0000000	0.0000000	0.0000001	0.0000020	0.08
0.0000000	0.0000000	0.0000002	0.0000045	0.09
0.0000000	0.0000000	0.0000004	0.0000091	0.10
0.0000000	0.0000000	0.0000008	0.0000173	0.11
0.0000000	0.0000000	0.0000015	0.0000308	0.12
0.0000000	0.0000001	0.0000029	0.0000525	0.13
0.0000000	0.0000002	0.0000051	0.0000856	0.14
0.0000000	0.0000003	0.0000087	0.0001346	0.15
0.0000000	0.0000006	0.0000142	0.0002051	0.16
0.0000000	0.0000010	0.0000226	0.0003042	0.17
0.0000000	0.0000017	0.0000350	0.0004401	0.18
0.0000001	0.0000027	0.0000528	0.0006229	0.19
0.0000001	0.0000042	0.0000779	0.0008644	0.20
0.0000002	0.0000064	0.0001127	0.0011783	0.21
0.0000003	0.0000097	0.0001599	0.0015804	0.22
0.0000004	0.0000143	0.0002232	0.0020885	0.23
0.0000006	0.0000207	0.0003068	0.0027228	0.24
0.0000010	0.0000296	0.0004158	0.0035057	0.25
0.0000014	0.0000416	0.0005362	0.0044618	0.26
0.0000021	0.0000577	0.0007350	0.0056181	0.27
0.0000030	0.0000791	0.0009605	0.0070039	0.28
0.0000042	0.0001072	0.0012420	0.0086507	0.29
0.0000059	0.0001437	0.0015904	0.0105921	0.30
0.0000082	0.0001906	0.0020179	0.0128637	0.31
0.0000113	0.0002505	0.0025384	0.0155029	0.32
0.0000153	0.0003263	0.0031673	0.0185489	0.33
0.0000206	0.0004214	0.0039219	0.0220422	0.34
0.0000276	0.0005399	0.0048213	0.0260243	0.35
0.0000366	0.0006865	0.0058864	0.0305376	0.36
0.0000481	0.0008668	0.0071403	0.0356252	0.37
0.0000628	0.0010871	0.0086079	0.0413301	0.38
0.0000814	0.0013546	0.0103163	0.0476949	0.39
0.0001049	0.0016777	0.0122946	0.0547619	0.40
0.0001342	0.0020658	0.0145738	0.0625719	0.41
0.0001708	0.0025295	0.0171871	0.0711643	0.42
0.0002161	0.0030809	0.0201696	0.0805763	0.43
0.0002720	0.0037335	0.0235583	0.0908427	0.44
0.0003405	0.0045022	0.0273918	0.1019949	0.45
0.0004242	0.0054040	0.0317105	0.1140612	0.46
0.0005260	0.0064574	0.0365560	0.1270655	0.47
0.0006493	0.0076828	0.0419713	0.1410272	0.48
0.0007979	0.0091028	0.0480003	0.1559607	0.49
0.0009766	0.0107422	0.0546875	0.1718750	0.50

TABLA 2. *(Continuación)*

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$n = 10$ $x = 6$	$n = 10$ $x = 5$	$n = 10$ $x = 4$	$n = 10$ $x = 3$	$n = 10$ $x = 2$	$n = 10$ $x = 1$	p
0.0000000	0.0000000	0.0000020	0.0001138	0.0042662	0.0956179	0.01
0.0000000	0.0000007	0.0000305	0.0008639	0.0161776	0.1829272	0.02
0.0000001	0.0000054	0.0001471	0.0027650	0.0345066	0.2625759	0.03
0.0000007	0.0000218	0.0004426	0.0062137	0.0581538	0.3351674	0.04
0.0000028	0.0000637	0.0010285	0.0115036	0.0861384	0.4012631	0.05
0.0000079	0.0001517	0.0020293	0.0188378	0.1175880	0.4613849	0.06
0.0000193	0.0003139	0.0035761	0.0283421	0.1517299	0.5160177	0.07
0.0000415	0.0005857	0.0058013	0.0400754	0.1878825	0.5656115	0.08
0.0000810	0.0010096	0.0088338	0.0540400	0.2254471	0.6105839	0.09
0.0001469	0.0016349	0.0127952	0.0701908	0.2639011	0.6513216	0.10
0.0002507	0.0025170	0.0177972	0.0884435	0.3027908	0.6881828	0.11
0.0004069	0.0037161	0.0239388	0.1086818	0.3417250	0.7214990	0.12
0.0006332	0.0052967	0.0313048	0.1307642	0.3803692	0.7515766	0.13
0.0009505	0.0073263	0.0399642	0.1542980	0.4184400	0.7786984	0.14
0.0013832	0.0098741	0.0499698	0.1798035	0.4557002	0.8031256	0.15
0.0019593	0.0130101	0.0613577	0.2064005	0.4919536	0.8250988	0.16
0.0027098	0.0168038	0.0741472	0.2341305	0.5270412	0.8448396	0.17
0.0036694	0.0213229	0.0883411	0.2628010	0.5608368	0.8625520	0.18
0.0048757	0.0266325	0.1039261	0.2922204	0.5932435	0.8784233	0.19
0.0063694	0.0327935	0.1208739	0.3222005	0.6241904	0.8926258	0.20
0.0081935	0.0398624	0.1391418	0.3525586	0.6536289	0.9053172	0.21
0.0103936	0.0478897	0.1586739	0.3831197	0.6815306	0.9166422	0.22
0.0130167	0.0569196	0.1794024	0.4137173	0.7078843	0.9267332	0.23
0.0161116	0.0669890	0.2012487	0.4441949	0.7326936	0.9357111	0.24
0.0197277	0.0781269	0.2241249	0.4744072	0.7559748	0.9436865	0.25
0.0239148	0.0903542	0.2479349	0.5042200	0.7777550	0.9507601	0.26
0.0287224	0.1036831	0.2725761	0.5335112	0.7980705	0.9570237	0.27
0.0341994	0.1181171	0.2979405	0.5621710	0.8169646	0.9625609	0.28
0.0403932	0.1336503	0.3239164	0.5901015	0.8344869	0.9674476	0.29
0.0473490	0.1502683	0.3503893	0.6172172	0.8506917	0.9717525	0.30
0.0551097	0.1679475	0.3772433	0.6434445	0.8656366	0.9755381	0.31
0.0637149	0.1866554	0.4043626	0.6687212	0.8793821	0.9788608	0.32
0.0732005	0.2063514	0.4316320	0.6929966	0.8919901	0.9817716	0.33
0.0835979	0.2269866	0.4589388	0.7162304	0.9035235	0.9843166	0.34
0.0949341	0.2485045	0.4861730	0.7383926	0.9140456	0.9865373	0.35
0.1072304	0.2708415	0.5132284	0.7594627	0.9236190	0.9884708	0.36
0.1205026	0.2939277	0.5400038	0.7794292	0.9323056	0.9901507	0.37
0.1347603	0.3176870	0.5664030	0.7982887	0.9401661	0.9916070	0.38
0.1500068	0.3420385	0.5923361	0.8160453	0.9472594	0.9928666	0.39
0.1662386	0.3668967	0.6177194	0.8327102	0.9536426	0.9939534	0.40
0.1834452	0.3921728	0.6424762	0.8483007	0.9593705	0.9948888	0.41
0.2016092	0.4177749	0.6665372	0.8628393	0.9644958	0.9956920	0.42
0.2207058	0.4436094	0.6898401	0.8763538	0.9690684	0.9963797	0.43
0.2407033	0.4695813	0.7123307	0.8888757	0.9731358	0.9969669	0.44
0.2615627	0.4955954	0.7339621	0.9004403	0.9767429	0.9974670	0.45
0.2832382	0.5215571	0.7546952	0.9110859	0.9799319	0.9978917	0.46
0.3056772	0.5473730	0.7744985	0.9208530	0.9827422	0.9982511	0.47
0.3288205	0.5729517	0.7933480	0.9297839	0.9852109	0.9985544	0.48
0.3526028	0.5982047	0.8112268	0.9379222	0.9873722	0.9988096	0.49
0.3769531	0.6230469	0.8281250	0.9453125	0.9892578	0.9990234	0.50

TABLA 3. Función de la distribución de Poisson*

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=\infty} \frac{e^{-a}a^r}{r!}$$

x	$a = 0.2$	$a = 0.3$	$a = 0.4$	$a = 0.5$	$a = 0.6$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.1812692	0.2591818	0.3296800	0.393469	0.451188
2	0.0175231	0.0369363	0.0615519	0.090204	0.121901
3	0.0011485	0.0035995	0.0079263	0.014388	0.023115
4	0.0000568	0.0002658	0.0007763	0.001752	0.003358
5	0.0000023	0.0000158	0.0000612	0.000172	0.000394
6	0.0000001	0.0000008	0.0000040	0.000014	0.000039
7			0.0000002	0.000001	0.000003
x	$a = 0.7$	$a = 0.8$	$a = 0.9$	$a = 1.0$	$a = 1.2$
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
1	0.503415	0.550671	0.593430	0.632121	0.698806
2	0.155805	0.191208	0.227518	0.264241	0.337373
3	0.034142	0.047423	0.062857	0.080301	0.120513
4	0.005753	0.009080	0.013459	0.018988	0.033769
					0.007746
5	0.000786	0.001411	0.002344	0.003660	
6	0.000090	0.000184	0.000343	0.000594	0.001500
7	0.000009	0.000021	0.000043	0.000083	0.000251
8	0.000001	0.000002	0.000005	0.000010	0.000037
9				0.000001	0.000005
10					0.000001
x	$a = 1.4$	$a = 1.6$	$a = 1.8$	$a = 1.9$	$a = 2.0$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.753403	0.798103	0.834701	0.850431	0.864665
2	0.408167	0.475069	0.537163	0.566251	0.593994
3	0.166502	0.216642	0.269379	0.296280	0.323324
4	0.053725	0.078813	0.108708	0.125298	0.142877
5	0.014253	0.023682	0.036407	0.044081	0.052653
6	0.003201	0.006040	0.010378	0.013219	0.016564
7	0.000622	0.001336	0.002569	0.003446	0.004534
8	0.000107	0.000260	0.000562	0.000793	0.001097
9	0.000016	0.000045	0.000110	0.000163	0.000237
10	0.000002	0.000007	0.000019	0.000030	0.000046
11		0.000001	0.000003	0.000005	0.000008

*E.C. Molina, *Poisson's Exponential Binomial Limit*, Princeton, N.J., D. Van Nostrand, Inc., 1947.

TABLA 3. *(Continuación)*

$$1 - F(x-1) = \sum_{r=x}^{r=\infty} \frac{e^{-a}a^r}{r!}$$

x	$a = 2.5$	$a = 3.0$	$a = 3.5$	$a = 4.0$	$a = 4.5$	$a = 5.0$
0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
1	0.917915	0.950213	0.969803	0.981684	0.988891	0.993262
2	0.712703	0.800852	0.864112	0.908422	0.938901	0.959572
3	0.456187	0.576810	0.679153	0.761897	0.826422	0.875348
4	0.242424	0.352768	0.463367	0.566530	0.657704	0.734974
5	0.108822	0.184737	0.274555	0.371163	0.467896	0.559507
6	0.042021	0.083918	0.142386	0.214870	0.297070	0.384039
7	0.014187	0.033509	0.065288	0.110674	0.168949	0.237817
8	0.004247	0.011905	0.026736	0.051134	0.086586	0.133372
9	0.001140	0.003803	0.009874	0.021363	0.040257	0.068094
10	0.000277	0.001102	0.003315	0.008132	0.017093	0.031828
11	0.000062	0.000292	0.001019	0.002840	0.006669	0.013695
12	0.000013	0.000071	0.000289	0.000915	0.002404	0.005453
13	0.000002	0.000016	0.000076	0.000274	0.000805	0.002019
14		0.000003	0.000019	0.000076	0.000252	0.000698
15		0.000001	0.000004	0.000020	0.000074	0.000226
16			0.000001	0.000005	0.000020	0.000069
17				0.000001	0.000005	0.000020
18					0.000001	0.000005
19						0.000001

TABLA 4. Valores críticos para la distribución t de Student*

$\Pr\{t \text{ de Student} \leq \text{valor tabulado}\} = \gamma$

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0482	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.6825	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.6822	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.6820	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.6818	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.6816	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.6814	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.6812	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.6810	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.6808	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.6805	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.6804	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.6802	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.6801	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.6800	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

*D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1962. (Cortesía de la Atomic Energy Commission, Washington, D.C.)

TABLA 4. *(Continuación)*

$\Pr\{t \text{ de Student} \leq \text{valor tabulado}\} = \gamma$

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
46	0.6799	1.3002	1.6787	2.0129	2.4102	2.6870
47	0.6797	1.2998	1.6779	2.0117	2.4083	2.6846
48	0.6796	1.2994	1.6772	2.0106	2.4066	2.6822
49	0.6795	1.2991	1.6766	2.0096	2.4049	2.6800
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
51	0.6793	1.2984	1.6753	2.0076	2.4017	2.6757
52	0.6792	1.2980	1.6747	2.0066	2.4002	2.6737
53	0.6791	1.2977	1.6741	2.0057	2.3988	2.6718
54	0.6791	1.2974	1.6736	2.0049	2.3974	2.6700
55	0.6790	1.2971	1.6730	2.0040	2.3961	2.6682
56	0.6789	1.2969	1.6725	2.0032	2.3948	2.6665
57	0.6788	1.2966	1.6720	2.0025	2.3936	2.6649
58	0.6787	1.2963	1.6716	2.0017	2.3924	2.6633
59	0.6787	1.2961	1.6711	2.0010	2.3912	2.6618
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
61	0.6785	1.2956	1.6702	1.9996	2.3890	2.6589
62	0.6785	1.2954	1.6698	1.9990	2.3880	2.6575
63	0.6784	1.2951	1.6694	1.9983	2.3870	2.6561
64	0.6783	1.2949	1.6690	1.9977	2.3860	2.6549
65	0.6783	1.2947	1.6686	1.9971	2.3851	2.6536
66	0.6782	1.2945	1.6683	1.9966	2.3842	2.6524
67	0.6782	1.2943	1.6679	1.9960	2.3833	2.6512
68	0.6781	1.2941	1.6676	1.9955	2.3824	2.6501
69	0.6781	1.2939	1.6672	1.9949	2.3816	2.6490
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
71	0.6780	1.2936	1.6666	1.9939	2.3800	2.6469
72	0.6779	1.2934	1.6663	1.9935	2.3793	2.6459
73	0.6779	1.2933	1.6660	1.9930	2.3785	2.6449
74	0.6778	1.2931	1.6657	1.9925	2.3778	2.6439
75	0.6778	1.2929	1.6654	1.9921	2.3771	2.6430
76	0.6777	1.2928	1.6652	1.9917	2.3764	2.6421
77	0.6777	1.2926	1.6649	1.9913	2.3758	2.6412
78	0.6776	1.2925	1.6646	1.9908	2.3751	2.6403
79	0.6776	1.2924	1.6644	1.9905	2.3745	2.6395
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
81	0.6775	1.2921	1.6639	1.9897	2.3733	2.6379
82	0.6775	1.2920	1.6636	1.9893	2.3727	2.6371
83	0.6775	1.2918	1.6634	1.9890	2.3721	2.6364
84	0.6774	1.2917	1.6632	1.9886	2.3716	2.6356
85	0.6774	1.2916	1.6630	1.9883	2.3710	2.6349
86	0.6774	1.2915	1.6628	1.9879	2.3705	2.6342
87	0.6773	1.2914	1.6626	1.9876	2.3700	2.6335
88	0.6773	1.2912	1.6624	1.9873	2.3695	2.6329
89	0.6773	1.2911	1.6622	1.9870	2.3690	2.6322
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316

TABLA 5. Valores críticos para la distribución de χ-cuadrada*

$\Pr\{\chi^2$ r.v. con f grados de libertad $\leq$ valores tabulados$\} = \gamma$

f	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25
1	–	–	0.001	0.004	0.016	0.102
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	5.071
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	9.299
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.165
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.037
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.912
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	12.792
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	13.675
19	6.884	7.633	8.907	10.117	11.651	14.562
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	15.452
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	16.344
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	17.240
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	18.137
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	19.037
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	19.939
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	20.843
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	21.749
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	22.657
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	23.567
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	24.478
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	25.390
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	26.304
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	27.219
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	28.136
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	29.054
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	29.973
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	30.893
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	31.815
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	32.737
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	33.660
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	34.585
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	35.510
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	36.436
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	37.363
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	38.291

*D. B. Owen, *Handbook of Statistical Tables*, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1962. (Cortesía de la Atomic Energy Commission, Washington, D.C.)

TABLA 5. *(Continuación)*

$\Pr\{\chi^2$ r.v. con f grados de libertad $\leq$ valores tabulados$\} = \gamma$

f	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	5.385	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	6.626	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	7.841	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	9.037	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	10.219	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	11.389	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	12.549	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	13.701	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	14.845	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	15.984	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	17.117	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	18.245	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	19.369	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	20.489	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	21.605	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	22.718	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	23.828	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	24.935	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	26.039	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	27.141	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	28.241	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	29.339	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	30.435	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	31.528	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	32.620	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	33.711	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	34.800	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	35.887	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	36.973	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	38.058	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	39.141	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	40.223	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	41.304	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	42.383	48.363	52.192	55.668	59.892	62.883
38	43.462	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	44.539	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	45.616	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	46.692	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	47.766	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	48.840	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	49.913	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	50.985	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166

TABLA 6. Números aleatorios*

07018	31172	12572	23968	55216	85366	56223	09300	94564	18172
52444	65625	97918	46794	62370	59344	20149	17596	51669	47429
72161	57299	87521	44351	99981	55008	93371	60620	66662	27036
17918	75071	91057	46829	47992	26797	64423	42379	91676	75127
13623	76165	43195	50205	75736	77473	07268	31330	07337	55901
27426	97534	89707	97453	90836	78967	00704	85734	21776	85764
96039	21338	88169	69530	53300	29895	71507	28517	77761	17244
68282	98888	25545	69406	29470	46476	54562	79373	72993	98998
54262	21477	33097	48125	92982	98382	11265	25366	06636	25349
66290	27544	72780	91384	47296	54892	59168	83951	91075	04724
53348	39044	04072	62210	01209	43999	54952	68699	31912	09317
34482	42758	40128	48436	30254	50029	19016	56837	05206	33851
99268	98715	07545	27317	52459	75366	43688	27460	65145	65429
95342	97178	10401	31615	95784	77026	33087	65961	10056	72834
38556	60373	77935	64608	28949	94764	45312	71171	15400	72182
39159	04795	51163	84475	60722	35268	05044	56420	39214	89822
41786	18169	96649	92406	42773	23672	37333	85734	99886	81200
95627	30768	30607	89023	60730	31519	53462	90489	81693	17849
98738	15548	42263	79489	85118	97073	01574	57310	59375	54417
75214	61575	27805	21930	94726	39454	19616	72239	93791	22610
73904	89123	19271	15792	72675	62175	48746	56084	54029	22296
33329	08896	94662	05781	59187	53284	28024	45421	37956	14252
66364	94799	62211	37539	80172	43269	91133	05562	82385	91760
68349	16984	86532	96186	53891	48268	82821	19526	63257	14288
19193	99621	66899	12351	72438	99839	24228	32079	53517	18558
49017	23489	19172	80439	76263	98918	59330	20121	89779	58862
76941	77008	27646	82072	28048	41589	70883	72035	81800	50296
55430	25875	26446	25738	32962	24266	26814	01194	48587	93319
33023	26895	65304	34978	43053	28951	22676	05303	39725	60054
87337	74487	83196	61939	05045	20405	69324	80823	20905	68727
81773	36773	21247	54735	68996	16937	18134	51873	10973	77090
74279	85087	94186	67793	18178	82224	17069	87880	54945	73489
34968	76028	54285	90845	35464	68076	15868	70063	26794	81386
99696	78454	21700	12301	88832	96796	59341	16136	01803	17537
55282	61051	97260	89829	69121	86547	62195	72492	33536	60137
31337	83886	72886	42598	05464	88071	92209	50728	67442	47529
94128	97990	58609	20002	76530	81981	30999	50147	93941	80754
06511	48241	49521	64568	69459	95079	42588	98590	12829	64366
69981	03469	56128	80405	97485	88251	76708	09558	86759	15065
23701	56612	86307	02364	88677	17192	23082	00728	78660	74196
09237	24607	12817	98120	30937	70666	76059	44446	94188	14060
11007	45461	24725	02877	74667	18427	45658	40044	59484	59966
60622	78444	39582	91930	97948	13221	99234	99629	22430	49247
79973	43668	19599	30021	68572	31816	63033	14597	28953	21162
71080	71367	23485	82364	30321	42982	74427	25625	74309	15855
09923	26729	74573	16583	37689	06703	21846	78329	98578	25447
63094	72826	65558	22616	33472	67515	75585	90005	19747	08865
19806	42212	41268	84923	21002	30588	40676	94961	31154	83133
17295	74244	43088	27056	86338	47331	9737	83735	84058	12382
59338	27190	99302	84020	15425	14748	42380	99376	30496	84523

*The Rand Corporation, *A Million Random Digits with 100,000 Deviates*, The Free Press, 1955.

TABLA 6. *(Continuación)*

96124	73355	01925	17210	81719	74603	30305	29383	69753	61156
31283	54371	20985	00299	71681	22496	71241	35347	37285	02028
49988	48558	20397	60384	24574	14852	26414	10767	60334	36911
82790	45529	48792	31384	55649	08779	94194	62843	11182	49766
51473	13821	75776	24401	00445	61570	80687	39454	07628	94806
07785	02854	91971	63537	84671	03517	28914	48762	76952	96837
16624	68335	46052	07442	41667	62897	40326	75187	36639	21396
28718	92405	07123	22008	83082	28526	49117	96627	38470	78905
33373	90330	67545	74667	20398	58239	22772	34500	34392	92989
36535	48606	11139	82646	18600	53898	70267	74970	35100	01291
47408	62155	47467	14813	56684	56681	31779	30441	19883	17044
56129	36513	41292	82142	13717	49966	35367	43255	06993	17418
35459	10460	33925	75946	26708	63004	89286	24880	38838	76022
61955	55992	36520	08005	48783	08773	45424	44359	25248	75881
85374	69791	18857	92948	90933	90290	97232	61348	22204	43440
15556	39555	09325	16717	74724	79343	26313	39585	56285	22525
75454	90681	73339	08810	89616	99234	36613	43440	60269	90899
27582	90856	04254	23715	00086	12164	16943	62099	32132	93031
89658	47708	01691	22284	50446	05451	68947	34932	81628	22716
57194	77203	26072	92538	85097	58178	46391	58980	12207	94901
64219	53416	03811	11439	80876	38314	77078	85171	06316	29523
53166	78592	80640	58248	68818	78915	57288	85310	43287	89223
58112	88451	22892	29765	20908	49267	18968	39165	03332	94932
14548	36314	05831	01921	97159	55540	00867	84293	54653	81281
21251	15618	40764	99303	38995	97879	98178	03701	70069	80463
30953	63369	05445	20240	35362	82072	29280	72468	94845	97004
12764	79194	36992	74905	85867	18672	28716	17995	63510	67901
72393	71563	42596	87316	80039	75647	66121	17083	07327	39209
11031	40757	10904	22385	39813	63111	33237	95008	09057	50820
91948	69586	45045	67557	86629	67943	23405	86552	17393	24221
18537	07384	13059	47389	97265	11379	24426	09528	36035	02501
66885	11985	38553	97029	88433	78988	88864	03876	48791	72613
96177	71237	08744	38483	16602	94343	18593	84747	57469	08334
37321	96867	64979	89159	33269	06367	09234	77201	92195	89547
77905	69703	77702	90176	04883	84487	88688	09360	42803	88379
53814	14560	43698	86631	87561	90731	59632	52672	24519	10966
16963	37320	40740	79330	04318	56078	23196	49668	80418	73842
87558	58885	65475	25295	59946	47877	81764	85986	61687	04373
84269	55068	10532	43324	39407	65004	35041	20714	20880	19385
94907	08019	05159	64613	26962	30688	51677	05111	51215	53285
45735	14319	78439	18033	72250	87674	67405	94163	16622	54994
11755	40589	83489	95820	70913	87328	04636	42466	68427	79135
51242	05075	80028	35144	70599	92270	62912	08859	87405	08266
00281	25893	94848	74342	45848	10404	28635	92136	42852	40812
12233	65661	10625	93343	21834	95563	15070	99901	09382	01498
88817	57827	02940	66788	76246	85094	44885	72542	31695	83843
75548	53699	90888	94921	04949	80725	72120	80838	38409	72270
42860	40656	33282	45677	05003	46597	67666	70858	41314	71100
71208	72822	17662	50330	32576	95030	87874	25965	05261	95727
44319	22313	89649	47415	21065	42846	78055	64776	64993	48051

TABLA 7. Desviaciones normales aleatorias

	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
00	.31	-.51	-1.45	-.35	.18	.09	.00	.11	-1.91	-1.07
01	.90	-.36	.33	-.28	.30	-2.62	-1.43	-1.79	-.99	-.35
02	.22	.58	.87	-.02	.04	.12	-.17	.78	-1.31	.95
03	-1.00	.53	-1.90	-.77	.67	.56	-.94	.16	2.22	-.08
04	-.12	-.43	.69	.75	-.32	.71	-1.13	-.79	-.26	-.86
05	.01	.37	-.36	.68	.44	.43	1.18	-.68	-.13	-.41
06	.16	-.83	-1.88	.89	-.39	.93	-.76	-.12	.66	2.06
07	1.31	-.82	-.36	.36	.24	-.95	.41	-.77	.78	-.27
08	-.38	-.26	-1.73	.06	-.14	1.59	.96	-1.39	.51	-.50
09	.38	.42	-1.39	-.22	-.28	-.03	2.48	1.11	1.10	.40
10	1.07	2.26	-1.68	-.04	.19	1.38	-1.53	-1.41	.09	-1.91
11	-1.65	-1.29	-1.03	.06	2.18	-.55	-.34	-1.07	.80	1.77
12	1.02	-.67	-1.11	.08	-1.92	-.97	-.70	-.40	-.72	-.47
13	.06	1.43	-.46	-.62	-.11	.36	.64	-.27	.72	.68
14	.47	-1.84	.69	-1.07	.83	-.25	-.91	-1.94	.96	.75
15	.10	1.00	-.54	.61	-1.04	-.33	.94	.56	.62	.07
16	-.71	.04	.63	-.26	-1.35	-1.20	1.52	.63	-1.29	1.16
17	-.94	-.94	.56	-.09	.63	-.36	.20	-.60	-.29	.94
18	.29	.62	-1.09	1.84	-.11	.19	-.45	.23	-.63	-.06
19	.57	.54	-.21	.09	-.57	-.10	-1.25	-.26	.88	-.26
20	.24	.19	-.67	3.04	1.26	-1.21	.52	-.05	.76	-.09
21	-1.47	1.20	.70	-1.80	-1.07	.29	1.18	.34	-.74	1.75
22	-.01	.49	1.16	.17	-.48	.81	1.40	.17	.57	.64
23	-.63	-.26	.55	-.21	-.07	-.37	.47	-1.69	.05	-.96
24	.85	-.65	-.94	.12	-1.67	.28	-.42	.14	-1.15	-.41
25	1.07	-.36	1.10	.83	.37	-.20	-.75	-.50	.18	1.31
26	1.18	2.09	-.61	.44	.40	.42	-.61	-2.55	-.09	-1.33
27	.47	.88	.71	.31	.41	-1.96	.34	-.17	1.73	-.33
28	.26	.90	.11	.28	.76	-.12	-1.01	1.29	-.71	2.15
29	.39	-.88	-.15	-.38	.55	-.41	-.02	-.74	-.48	.46
30	-1.01	-.89	-1.23	.07	-.07	.08	-.08	-1.95	-.34	-.29
31	1.36	.18	.85	.55	.00	-.43	.27	-.39	.25	.69
32	1.02	-2.49	1.79	.04	-.03	.85	-.29	-.77	.28	-.33
33	-.53	-1.13	.75	-.39	.43	.10	-2.17	.37	-1.85	.96
34	.76	1.21	-.68	.26	.93	.99	1.12	-1.72	-.04	-.73
35	.07	-.23	-.88	-.23	.68	.24	1.38	-2.10	-.79	-.27
36	.27	.61	.43	-.38	.68	-.72	.90	-.14	-1.61	-.88
37	.93	.72	-.45	2.80	-.12	.74	-1.47	.39	-.61	-2.77
38	1.03	-.43	.95	-1.49	-.63	.22	.79	-2.80	-.41	.61
39	-.32	1.41	-.23	-.36	.60	-.59	.36	.63	.73	.81
40	1.41	.64	.06	.25	-1.75	.39	1.84	1.23	-1.27	-.75
41	.25	-.70	.33	.12	.04	1.03	-.64	.08	1.63	.34
42	-1.15	.57	.34	-.32	2.31	.74	.85	-1.25	-.17	.14
43	.72	.01	.50	-1.42	.26	-.74	-.55	1.86	-.17	-.10
44	-.92	.15	-.66	.83	.50	.24	-.40	1.90	.35	.69
45	-.42	.62	.24	.55	-.06	.14	-1.09	-1.53	.30	-1.56
46	-.54	1.21	-.53	.29	1.04	-.32	-1.20	.01	.05	.20
47	-.13	-.70	.07	.69	.88	1.18	.61	-.46	-1.54	.50
48	-.29	.36	1.44	-.44	.53	-.14	.66	.00	.33	-.36
49	1.90	-1.21	-1.87	-.27	-1.86	-.49	.25	.25	.14	1.73

TABLA 7. *(Continuación)*

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
00	-.73	.25	-2.08	.17	-1.04	-.23	.74	.23	.70	-.79
01	-.87	-.74	1.44	-.79	-.76	-.42	1.93	.88	.80	-.53
02	1.18	.05	.10	-.15	.05	1.06	.82	.90	-1.38	.51
03	-2.09	1.13	-.50	.37	-.18	-.16	-1.85	-.90	1.32	-.83
04	-.32	1.06	1.14	-.23	.49	1.10	-.27	-.64	.47	-.05
05	.90	-.86	.63	-1.62	-.52	-1.55	.78	-.54	-.29	.19
06	-.16	-.22	-.17	-.81	.49	.96	.53	1.73	.14	1.21
07	.15	-1.12	.80	-.30	-.77	-.91	.00	.94	-1.16	.44
08	-1.87	.72	-1.17	-.36	-1.42	-.46	-.58	.03	2.08	1.11
09	.87	.95	.05	.46	-.01	.85	1.19	-1.61	-.10	-.87
10	.52	.12	-1.04	-.56	-.91	-.13	.17	1.17	-1.24	.84
11	-1.39	-1.18	1.67	2.88	-2.06	.10	.05	-.55	.74	.33
12	-.94	-.46	-.85	-.29	.54	.71	.90	-.42	-1.30	.50
13	-.51	.04	-.44	-1.87	-1.06	1.18	-.39	.22	-.55	-.54
14	-1.50	-.21	-.89	.43	-1.81	-.07	-.66	-.02	1.77	-1.54
15	-.48	1.54	1.88	.66	-.62	.28	-.34	2.42	-1.65	2.06
16	.89	-.23	.57	.23	1.81	1.02	.33	1.23	1.31	.06
17	.38	1.52	-1.32	2.13	-.14	.28	-.46	.25	.65	1.18
18	-.53	.37	.19	-2.41	.16	.36	-.15	.14	-.15	-.73
19	.15	.62	-1.29	1.84	.80	-.65	1.72	-1.77	.07	.46
20	-.81	-.22	1.16	1.09	-.73	-.15	.87	-.88	.92	-.04
21	-1.61	2.51	-2.17	.49	-1.24	1.16	.97	.15	.37	.18
22	.26	-.48	-.43	-2.08	.75	1.59	1.78	-.55	.85	-1.87
23	-.32	.75	-.35	2.10	-.70	1.29	.94	.20	-1.16	.89
24	-1.00	1.37	.68	.00	1.87	-.14	.77	-.12	.89	-.73
25	.66	.04	-1.73	.25	.26	1.46	-.77	-1.67	.18	-.92
26	-.20	-1.53	.59	-.15	-.15	-.11	.68	-.14	-.42	-1.51
27	1.01	-.44	-.2	-2.05	-.27	-.50	-.27	-.45	.83	.49
28	-1.81	.45	.27	.67	-.74	-.17	-1.11	.13	-1.18	-1.41
29	-.40	1.34	1.50	.57	-1.78	.08	.95	.69	.38	.71
30	-.01	.15	-1.83	1.18	.11	.62	1.86	.42	.03	-.14
31	-.23	-.19	-1.08	.44	-.41	-1.32	.14	.65	-.76	.76
32	-1.27	.13	-.17	-.74	-.44	1.67	-.07	-.99	.51	.76
33	-1.72	1.70	-.61	.18	.48	-.26	-.12	-2.83	2.35	1.25
34	.78	1.55	-.19	.43	-1.53	-.76	.83	-.46	.48	-.43
35	1.86	1.12	-2.09	1.82	-.71	-1.76	-.20	-.38	.82	-1.08
36	-.50	-.93	-.68	-1.62	-.88	.05	-.27	.23	-.58	-.24
37	1.02	-.81	-.62	1.46	-.31	-.37	.08	.59	-.27	.37
38	-1.57	.10	.11	-1.48	1.02	2.35	.27	-1.22	-1.26	2.22
39	2.27	-.61	.61	-.28	-.39	-.45	.89	1.43	1.03	-.01
40	-2.17	-.69	1.33	-.26	.15	-.10	-.78	.64	-.70	.14
41	.05	-1.71	.21	.55	-.60	-.74	-.90	2.52	-.07	-1.11
42	-.38	1.75	.93	-1.36	-.60	-1.76	-1.10	.42	1.44	-.58
43	.40	-1.50	.24	-.66	.83	.37	-.35	.16	.96	.79
44	.39	.66	.19	-2.08	.32	-.42	-.53	.92	.69	-.03
45	-.12	1.18	-.08	.30	-.21	.45	-1.84	.26	.90	.85
46	1.20	-.91	-1.08	-.99	1.76	-.80	.51	.25	-.11	-.58
47	-1.04	1.28	2.50	1.56	-.95	-1.02	.45	-1.90	-.02	-.73
48	-.32	.56	-1.03	.11	-.72	.53	-.27	-.17	1.40	1.61
49	1.08	.56	.34	-.28	-.37	.46	.03	-1.13	.34	-1.08

Respuestas a problemas seleccionados*

CAPÍTULO 1

1.1. *a*) $\{5\}$ *b*) $\{1,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ *c*) $\{2,3,4,5\}$
d) $\{1,5,6,7,8,9,10\}$ *e*) $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$

1.2. *a*) $\{x|0 \leq x < \frac{1}{4}\} \cup \{x|\frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$
b) $\{x|0 \leq x < \frac{1}{4}\} \cup \{x|\frac{1}{2} < x \leq 1\} \cup \{x|\frac{3}{2} \leq x \leq 2\}$
c) $\{x|0 \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x|1 < x < 2\}$
d) $\{x|\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}\} \cup \{x|1 < x < \frac{3}{2}\}$

1.3. *a*) Verdadero *b*) Verdadero *c*) Falso *d*) Falso
e) Verdadero

1.4. *a*) $A = \{(0,0),(1,0),(2,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2)\}$
b) $B = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(6,0),(1,1),(2,1),(3,1),$
$(4,1),(5,1),(6,1),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(2,3),(3,3),(4,3),$
$(5,3),(6,3),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4),(6,4),(3,5),(4,5),(5,5),$
$(6,5),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$

1.6. $\{DD, NDD, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NDND, NDNN,$
$NNDD, NNDN, NNND, NNNN\}$

1.10. *a*) $\{(x,y)|0 \leq x < y \leq 24\}$

N. del E. Considérese la siguiente relación de respuestas alternativas a problemas incluidos en esta sección.

1.11. *a)* $A \cup B \cup C$ *b)* $[A \cap B^c \cap C^c] \cup [A^c \cap B \cap C^c] \cup [A^c \cap B^c \cap C]$
d) $A \cap B \cap C$

1.15.) $\frac{1}{13}, \frac{4}{13}, \frac{8}{13}$ **1.16.** *a)* $1 - z$ *b)* $y - z$ **1.17.** $\frac{5}{8}$

CAPÍTULO 2

2.1. *a)* $\frac{13}{18}$ **2.2.** *a)* $\frac{1}{12}$ *b)* $\frac{1}{20}$ **2.3.** *a)* $\frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{5}{8}$

2.4. *a)* $\dfrac{\binom{400}{90}\binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$ *b)* $1 - \left[\dfrac{\binom{400}{0}\binom{1100}{200} + \binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}\right]$

2.5. $\frac{4}{45}$ **2.6.** *a)* $\frac{1}{8}$ *b)* $\frac{7}{8}$ *c)* $\frac{3}{4}$

2.7. *a)* $\frac{3}{8}$ *b)* $\frac{1}{120}$ *c)* $\frac{7}{8}$ *d)* $\frac{5}{8}$ *e)* $\frac{1}{2}$ *f)* $\frac{91}{120}$ *g)* $\frac{1}{8}$

2.8. 120 **2.9.** 720

2.10. 455 **2.11.** *a)* 120 *b)* 2970

2.12. *a)* 4^8 *b)* $4 \cdot 3^7$ *c)* 70 *d)* 336

2.13. $(N-1)!/(N-n)!N^{n-1}$

2.14. *a)* 360 *b)* 1296 **2.15.** $a + b$

2.16. *a)* $2/n$ *b)* $2(n-1)/n^2$ **2.18.** 0.24

2.20. 120 **2.21.** $\dfrac{\binom{r}{r-1}\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k-1}} \cdot \dfrac{1}{n-k+1}$

2.22. $\frac{10!}{10^r(10-r)!}$

CAPÍTULO 3

3.1. $\left(\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{z+1}{z+v+1}\right) + \left(\frac{y}{x+y}\right)\left(\frac{z}{z+v+1}\right)$

3.2. *a)* $\frac{1}{6}$ *b)* $\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{1}{2}$ **3.3.** $\frac{5}{9}$

Prob. 2.21 $\dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}$

3.4. *a*) $\frac{2}{105}$ *b*) $\frac{2}{5}$ **3.6.** *a*) $\frac{33}{95}$ *b*) $\frac{14}{95}$ *c*) $\frac{48}{95}$

3.7. $\frac{2}{3}$ **3.9.** 0.362, 0.406, 0.232

3.12. *a*) $\frac{1}{4}$ *b*) $\frac{3}{4}$ **3.13.** $1-(1-p)^n$

3.15. $\frac{5}{16}$ **3.17.** *a*) 0.995 *b*) 0.145

3.20. *a*) $2p^2+2p^3-5p^4+2p^5$ *b*) $p+3p^2-4p^3-p^4+3p^5-p^6$

3.23. $\frac{3}{16}$ **3.25.** *a*) 0.50 *b*) 0.05

3.34. $\beta_n=\frac{1}{2}+(2p-1)^n(\beta-\frac{1}{2})$ **3.35.** *a*) 0.65 *b*) 0.22 *c*) 8/35

3.37. $p_n=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)^{n-1}}$

3.39. $(n-1)p^2/(1-2p+np^2)$

CAPÍTULO 4

4.1. $P(X=0)=\frac{1}{64}$, $P(X=1)=\frac{9}{64}$, $P(X=2)=\frac{27}{64}$, $P(x=3)=\frac{27}{64}$

4.2. *a*) $\binom{4}{x}\binom{1}{5}^x\binom{4}{5}^{4-x}$ *b*) $\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}\Big/\binom{25}{4}$

4.3. *a*) $\frac{1}{3}$ *b*) $\frac{1}{16}$ *c*) $\frac{1}{7}$ **4.9.** $\frac{27}{64}$

4.10. $a=e^{-b}$

4.11. $P(X>b|X<b/2)=-7b^3/(b^3+8)$

4.13. *a*) $a=(2/b)-b$ **4.14.** *a*) $F(t)=5t^4-4t^5$

4.15. *a*) $a=\frac{1}{2}$ *c*) $\frac{3}{8}$ **4.16.** *b*) $F(x)=3x^2-2x^3$

4.17. *a*) $f(x)=\frac{1}{5}$, $0<x<5$ *b*) $f(x)=(1/\pi)(x-x^2)^{-1/2}$, $0<x<1$
c) $f(x)=3e^{3x}$, $x<0$

4.20. *a*) $\alpha=3$ *c*) $\alpha=\frac{5}{4}$

4.23. *b*) $P(X=k)=\binom{10}{k}(0.09)^k(0.91)^{10-k}$

Prob. 4.9 $\frac{18}{64}$

4.25. *a)* $\frac{1}{4}$ **4.28.** $\frac{3}{5}$

4.29. *a)* $k = \beta$ *b)* $r = 1$ **4.30.** $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{4}$

CAPÍTULO 5

5.1. $g(y) = \frac{1}{2}(4 - y)^{-1/2}$, $3 < y < 4$

5.2. *a)* $g(y) = \frac{1}{6}$, $7 < y < 13$ *b)* $h(z) = 1/2z$, $e < z < e^3$

5.3. *a)* $g(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}e^{-y^{1/3}}$, $y > 0$

5.6. *a)* $g(y) = (1/\pi)(1 - y^2)^{-1/2}$, $-1 < y < 1$
b) $h(z) = (2/\pi)(1 - z^2)^{-1/2}$, $0 < z < 1$ *c)* $f(w) = 1$, $0 < w < 1$

5.7. *a)* $g(v) = (3/2\pi)[(3v/4\pi)^{-1/3} - 1]$, $0 < v < 4\pi/3$
b) $h(s) = (3/4\pi)[1 - (s/4\pi)^{1/2}]$, $0 < s < 4\pi$

5.8. $g(p) = \frac{1}{8}(2/p)^{1/2}$, $162 < p < 242$

5.10. *a)* $g(0) = 1$; $g(y) = 0$, $y \neq 0$
b) $g(0) = a/k$; $g(y) = (x_0 - a)/ky_0$, $0 < y < y_0[(k - a)/(x_0 - a)]$
c) $g(0) = a/k$; $g(y) = (x_0 - a)/ky_0$, $0 < y < y_0$; $g(y_0) = 1 - x_0/k$

5.13. 0.71

CAPÍTULO 6

6.2. *a)* $k = \frac{1}{8}$ *b)* $h(x) = x^3/4$, $0 < x < 2$
c) $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} - y/4 + y^3/48, & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{3} - y/4 + (5/48)y^3, & -2 \leq y \leq 0 \end{cases}$

6.3. *a)* $\frac{5}{6}$ *b)* $\frac{7}{24}$ *c)* $\frac{5}{32}$ **6.5.** $k = 1/(1 - e^{-1})^2$

6.6. *a)* $k = \frac{1}{2}$ *b)* $h(x) = 1 - |x|$, $-1 < x < 1$
c) $g(y) = 1 - |y|$, $-1 < y < 1$

6.8. $h(z) = 1/2z^2$, $z \geq 1$
$= 1/2$, $0 < z < 1$

6.11. $g(h) = (1600 - 9h^2)/80h^2$, $8 < h < \frac{40}{3}$
$= \frac{1}{5}$, $\frac{20}{3} < h \leq 8$
$= (5h^2 - 80)/16h^2$, $4 \leq h \leq \frac{20}{3}$

6.12. $h(i) = e^{-(2/i)^{1/2}}[-(2/i) - 2(2/i)^{1/2} - 2]$
$+ e^{-(1/i)^{1/2}}[(1/i) + 2(1/i)^{1/2} + 2],\ i > 0$

6.13. $h(w) = 6 + 6w - 12w^{1/2},\ 0 < w < 1$

6.14. *a)* $g(x) = e^{-x},\ x > 0$ *b)* $h(y) = ye^{-y},\ y > 0$

CAPÍTULO 7

7.3. 3.4

7.4. $\frac{1}{3}(2C_3 + C_2 - 3C_1)$

7.6. \$0.03

7.8. $7\frac{2}{15}$

7.9. \$50

7.10. *a)* $C = \frac{1}{6}$ *b)* $E(D) = \frac{19}{9}$

7.12. *b)* $E(Z) = \frac{8}{3}$

7.13. *b)* $E(W) = \frac{4}{3}$

7.14. 154

7.15. $E(Y) = 10,\ V(Y) = 3,\ E(Z) = (e/2)(e^2 - 1),\ V(Z) = (e^2/2)(e^2 - 1)$

7.18. $E(Y) = 0,\ V(Y) = \frac{1}{2},\ E(Z) = 2/\pi,\ V(Z) = (\pi^2 - 8)/2\pi^2,\ E(W) = \frac{1}{2},\ V(W) = \frac{1}{12}$

7.20. *Caso 2:* $E(Y) = (y_0/2k)(x_0 - a),\ V(y) = \frac{(x_0-a)y_0^2}{k}\left[\frac{1}{3} - \frac{x_0-a}{4k}\right]$

7.24. $a = \frac{1}{5},\ b = 2$

7.25. *a)* $E(V) = \frac{3}{2}$
b) $E(P) = \frac{4}{3}$

7.26. $V(X) = \frac{4}{3}a^2$

7.27. $E(S) = \frac{65}{6}$

7.30. *a)* $g(x) = x/2,\ 0 < x < 2;\ h(y) = 1/2 - y/8,\ 0 < y < 4$
b) $V(X) = \frac{2}{9}$

7.31. $E(Z) \simeq \mu_x/\mu_y + 2(\mu_x/\mu_y^3)\sigma_y^2;\ V(Z) \simeq (1/\mu_y^2)\sigma_x^2 + (\mu_x^2/\mu_y^4)\sigma_y^2$

Prob. 7.8 $7\frac{1}{3}$

Prob. 7.9 \$60

Prob. 7.31 $E(Z) \simeq \mu_x/\mu_y + (\mu_x/\mu_y^3)\sigma_y^2;\ V(Z) \simeq (1/\mu_y^2)\sigma_x^2 + (\mu_x^2/\mu_y^4)\sigma_y^2$

7.32. $E(Z) \simeq \frac{29}{37}$ $V(Z) \simeq \frac{3}{27}$ **7.35.** $\frac{1}{4}$; 0

7.46. $\frac{48}{65}$ **7.48.** $P(X_i = 1) = p(r/n) + q[(n - r)/n]$

CAPÍTULO 8

8.1. 0.219

8.3. *a*) 0.145 *b*) 4 *c*) 2 *d*) 1 o 2 *e*) 1.785 *f*) 0.215

8.4. 0.3758 (binomial), 0.4060 (de Poisson)

8.5. 0.067 **8.6.** $P(X = 0) = 0.264$

8.7. $E(P) = \$32.64$ **8.9.** *b*) 0.027

8.10. 0.215 **8.12.** *a*) $(0.735)^7$
b) $1 - (0.265)^7$

8.16. *a*) $(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4)$ *c*) 0.0964

8.17. *a*) 0.064 **8.20.** (2-ln 3)/3 **8.24.** \$19.125

CAPÍTULO 9

9.1. *a*) 0.2266 *b*) 0.2902 **9.2.** 0.3085

9.3. 0.21 **9.5.** *a*) D_2 *b*) D_2

9.6. $E(Y) = (2\pi)^{1/2}$, $V(Y) = (\pi - 2)/\pi$

9.10. $C = 0.433\sigma = \mu$ **9.11.** 0.5090

Prob. 7.32 $E(Z) \simeq \frac{28}{27}$ $V(Z) \simeq \frac{2}{27}$

Prob. 8.3 *e*) 1.35 *f*) 0.65

Prob. 8.7 \$27.24

Prob. 9.11 0.7745

9.12. $E(L) = \$0.528$

9.13. *a*) $\frac{1}{4}$; 0.0456 *b*) $\frac{1}{4}$ 0.069 *c*) $\frac{1}{4}$; 0.049

9.15. \$23.40 **9.17.** *a*) \$0.077

9.24. 0.10, 0.80

9.25. $E(Y) \simeq \ln \mu - (1/2\mu^2)\sigma^2$; $V(Y) \simeq (1/\mu^2)\sigma^2$

9.28. *b*) $E(X) = np[(1 - p^{n-1})/(1 - p^n)]$

9.32. 0.15

CAPÍTULO 10

10.1. *a*) $M_X(t) = (2/t^2)[e^t(t-1)+1]$ *b*) $E(X) = \frac{2}{3}$, $V(X) = \frac{1}{18}$

10.3. *a*) $M_X(t) = \lambda e^{ta}/(\lambda - t)$ *b*) $E(X) = (a\lambda + 1)/\lambda$, $V(X) = 1/\lambda^2$

10.4. *a*) $M_X(t) = \frac{1}{6}(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t})$

10.6. *a*) $(1 - t^2)^{-1}$ **10.8.** *b*) $E(X) = 3.2$

10.9. *a*) 0.8686 **10.12.** 0.30

10.13. 0.75 **10.14.** 0.579

10.18. $\frac{1}{3}$ **10.19.** $(e^{3t} - 1)/3te^t$

CAPÍTULO 11

11.1. 83.55 horas, 81.77 horas, 78.35 horas

11.2. 48.6 horas

11.3. $f(t) = C = 0 \exp[-C_0 t]$, $0 \le t \le t_0$

$= C_1 \exp[-C_0 t_0 + C_1(t_0 - t_1)]$, $t > t_0$

11.4. *a*) $f(t) = Ce^{-C(t-A)}$, $t \ge A$ **11.5.** *b*) $R(t) = [A/(A+t)]^{r+1}$

11.7. *a*) Aproximadamente $(0.5)^6$ **11.9.** 0.007

11.10. $R(t) = 2e^{-0.06t} - e^{-0.09t}$ **11.11.** *a*) 0.014

11.12. *a*) $m = \ln(\sqrt{2})$ *b*) $m = 0.01$ *c*) $+\infty$

11.13. $R(t) = \exp(-C_0 t),\ 0 < t < t_0$

$= \exp[t(C_1 t_0 - C_0) - (C_1/2)(t^2 + t_0^2)],\ t > t_0$

11.14. $R(t) = e^{-\beta_1 t} + e^{-\beta_2 t} + e^{-\beta_3 t} - e^{-(\beta_1+\beta_2)t} - e^{-(\beta_1+\beta_3)t}$

$- e^{-(\beta_2+\beta_3)t} + e^{-(\beta_1+\beta_2+\beta_3)t}$

11.15. *a*) $R_S = 1 - (1 - R^n)^k$ **11.16.** *a*) $R_S = [1 - (1 - R)^k]^n$

11.18. *a*) 0.999926 *b*) 0.99 *c*) 0.68

11.19. *a*) $R_S = [1 - (1 - R_A)(1 - R_B)(1 - R_C)][1 - (1 - R_{A'})(1 - R_{B'})]$

. *b*) $R_S = 1 - R_C(1 - R_{A'})(1 - B_{B'})$

$- (1 - R_C)(1 - R_A R_{A'})(1 - R_B R_{B'})$

11.22. $M_X(t) = -2\lambda[1/(t - \lambda) - 1/(t - 2\lambda)]$

CAPÍTULO 12

12.1. *a*) $n = 392$ *b*) $n = 5000$ **12.2.** *a*) 0.083

12.3. *a*) 0.9662 *b*) $n = 24$ **12.4.** 0.1814

12.5. *a*) 0.1802 *b*) $n = 374$ **12.6.** *a*) 0.1112 *b*) 0.1915

12.7. $g(r) = (15,000)^{-1}(r^3 - 60r^2 + 600r),\ 0 \le r \le 10$

$= (15,000)^{-1}(-r^3 + 60r^2 - 1200r + 8000),\ 10 \le r \le 20$

12.9. *a*) $g(s) = 50[1 - e^{-0.2(s+0.01)}]$, si $-0.01 \le s \le 0.01$

$= 50[e^{-0.2(s-0.01)} - e^{-0.2(s+0.01)}]$, si $s > 0.01$

12.12. $f(s) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{s - 99}{2}\right) - \Phi\left(\frac{s - 101}{2}\right)\right]$

12.13. *a*) $\frac{p_1 p_2 (1 - p_1)^{k-1}}{p_2 - p_1}\left[1 - \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1}\right)^{k-1}\right]$ *b*) 0.055

Prob. 12.2 *a*) 0.83

Prob. 12.5 *b*) $n = 443$

Prob.12.13 *b*) 0.043

CAPÍTULO 13

13.3. $P(M = m) = [1 - (1-p)^m]^n - [1 - (1-p)^{m-1}]^n$

13.4. *a*) 0.13 *b*) 0.58

13.5. *a*) 0.018 *b*) 0.77

13.6. 0.89

13.8. *a*) $(1-2t)^{-1}$

CAPÍTULO 14

14.1. $\frac{V(L_2)}{V(L_1)+V(L_2)}$

14.2. $C = 1/2(n-1)$

14.3. 16.1

14.4. $-1 - n/\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$

14.6. *a*) $1/(\bar{T} - t_0)$

14.7. *a*) $\frac{1}{T_0 - t_0} \ln\left(\frac{n}{n-k}\right)$

14.9. *a*) $k/\sum_{i=1}^{k} n_i$

14.13. 0.034

14.14. -0.52

14.15. $r/\bar{X}$

14.16. $n/\sum_{i=1}^{n} X_i^{\alpha}$

14.29. Distribución F con $(1, 1)$ grados de libertad

14.31. $(-4/5)$

14.32. 8.6

CAPÍTULO 15

15.1. *a*) $1 - \Phi\left(\frac{C-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$ *b*) $C = -2.33\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0$

15.2. *a*) $\Phi\left[\frac{C+\mu_0-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right] - \Phi\left[\frac{-C+\mu_0-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right]$ *b*) $C = 2.575\sigma n^{-1/2}$

Prob. 13.5 *b*) 0.735

Prob. 14.7 *a*) $\frac{1}{T_0 - t_0} \ln\left(\frac{N}{N-k}\right)^{-1}$

Prob. 14.13 0.036

Prob. 14.32 10.2

15.3. *a*) $\sum_{k=0}^{[nC]} \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!}$, donde $[nC]$ = mayor entero $\leq nC$.
c) 0.3233

15.7. *a*) $(1-p)^4[5p + (1+25p^5)(1-p) + 55p^4(1-p)^2 + 60p^3(1-p)^3 + 10p^2(1-p)^3]$

15.8. 15

15.9. *a*) $(k-1)$ *b*) Igual

15.12. *a*) $\operatorname{sen}\alpha / \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$

Índice de materias

aproximación de DeMoivre–Laplace para la distribución binomial, 329
árbol, diagrama de, 52

bondad de ajuste de
  pruebas, 434
  prueba de ajuste de distribuciones asintóticas, 436
  prueba de una distribución específica, 438, 439

coeficiente binomial, 35
coeficiente de confianza, 401
coeficiente de correlación, 189
  ejemplo de, 399
  evaluación de, 189
  interpretación de, 190, 191, 192, 193, 194
  propiedades de, 189
comparación entre varias distribuciones, 260
confiabilidad, 298
  de los sistemas, 311
  y la función de distribución acumulativa, 298
  y la longitud de vida esperada, 303
  y la tasa de falla, 298
conjunto, 4
  complemento de, 6
  identidad de, 7
  intersección de, 6
  número de elementos, 8
  subconjunto, 5
  unión de, 5
  universal, 5
  vacío, 5
convergencia en probabilidad, 325
covarianza, 189

desigualdad de Boole, 25
desigualdad de Chebyshev, 186, 187, 188
desviación estándar de variable aleatoria, 176
diagramas de Venn, 6
distribución binomial, 81
  aproximación normal a la, 327
  distribución de Pascal, y, 230
  propiedades de, 99
  valor esperado de, 155, 173
  varianza de, 180
distribución binomial negativa, 228
distribución de Cauchy, 270
distribución de Maxwell, 290
distribución de Pascal, 228
  esperanza de, 229
  varianza de, 229
  y la distribución binomial, 230
distribución de Poisson, 209
  propiedad reproductiva de, 288
  valor esperado de, 210
  varianza de, 210
  y la distribución binomial, 211

y la distribución multinomial, 294
distribución de Rayleigh, 290
distribución de Weibull, 309
aplicación de, 311
esperanza de, 310
varianza de, 310
distribución exponencial, 249
propiedades de, 250
valor esperado de, 252
y la distribución exponencial con dos parámetros, 292
y la distribución gama, 291
y varianza de, 250
distribución F de Snedecor, 415
distribución gama, 255, 291
valor esperado de, 256, 257
varianza de, 256, 257
y la distribución de Poisson, 256
y la distribución exponencial, 255, 291
distribución geométrica, 224
propiedades de, 226
valor esperado de, 225
varianza de, 225
distribución hipergeométrica, 38, 231
valor esperado de, 232
varianza de, 232
y la distribución binomial, 232
distribución log–normal, 270
distribución multinomial, 233
valor esperado de, 233
varianza de, 233
y la distribución de Poisson, 294
distribución normal, 239
aproximación a la distribución binomial, 327, 329
bivariada, 261
estandarizada, 243
función lineal de, 243
propiedad reproductiva de, 288
suma de variables aleatorias independientes, 285
tabulación, 244
truncada, 263
valor esperado de, 242
varianza de, 242
distribución normal bivariada, 261, 263
distribución t de Student, 403
propiedades de, 403
distribución truncada, 263
distribución uniforme, 96
bidimensional, 130
unidimensional, 96, 97
valor esperado de, 155
varianza de, 182
distribución χ^2, 258
distribución gama, y la, 258
distribución normal, y la, 261, 288
grandes grados de libertad, para, 262
propiedad reproductiva, de, 288
valor esperado de, 258
varianza de, 260
distribuciones binomiales, 81
bivariadas normales, 261, 263
de Maxwell, 290
de Pascal, 228
de Poisson, 209
de Rayleigh, 290
de Weibull, 309
exponenciales, 249
F. de Snedecor, 415

gama, 255
geométricas, 224
hipergeométricas, 38, 231
log–normales, 270
multinomiales, 233
normales, 239
t de Student, 403
uniformes, 96, 130
distribuciones mixtas, 94

elección al azar de un objeto, 30, 38, 50
elección al azar de un punto en un intervalo, 96
enumeración, métodos de, 31
adición, principio de, 32
combinaciones, 34
multiplicación, principio de, 31
permutaciones, 33, 39
errores del tipo 1 y del tipo 2, 419
espacio muestral, 71
espacio muestral, el, 10
ejemplos de, 11
finito, 27
partición de, 49
espacio muestral finito, el, 27
y resultados igualmente probables, 28
esperanza condicional, 194
estadístico, 354
estimado, 375
estimado de máxima verosimilitud, 384, 386
por el parámetro de una distribución exponencial, 387, 391
por el parámetro de una distribución gama, 392
por el parámetro de una distribución normal, 388
por el parámetro de una distribución uniforme, 388, 389
por la ecuación de probabilidad, 387, 388
propiedades, 386
propiedades asintóticas, 393
estimado de parámetros, 375
estimado consistente, 376
estimado insesgado, 375
estimado de máxima probabilidad, 384, 385
estimado de mínimos cuadrados, 396
estimado inexistente o insesgado, 415
estimado insesgado de varianza mínima, 375
mejor estimado lineal, 378
estimado, 375
insesgado, 375
eventos, 13
complementarios, 14
independientes, 54
mutuamente excluyentes, 14
eventos equivalentes, 73, 106
eventos independientes, 54, 55
eventos mutuamente excluyentes, 14
eventos mutuamente independientes, 58
experimento aleatorio, 9
experimento no determinista, 8
experimentos de Bernoulli, 81

factorial, 33
falla, tasa de, 298
falla, ley exponencial de, 303

y la distribución de Poisson, 307
falla, ley gama de, 309
falla, ley normal de, 301
fórmula de Stirling, 328
frecuencia relativa, 15
función de densidad de probabilidades, 86
del cociente de variables aleatorias independientes, 142
conjuntas, 123
marginal, 128
de la suma de variables aleatorias independientes, 340
del intervalo de la muestra, 362
del máximo de la muestra, 358
del mínimo de la muestra, 358
del producto de variables aleatorias independientes, 142
función de densidad de probabilidad condicional, 132
función de densidad de probabilidad conjunta, 123
función de densidad de probabilidad marginal, 128
función de distribución, 94
función de distribución acumulativa, 90, 112
características de, 91
función de densidad de probabilidad, y la, 93, 94, 123
gráfica de, 91, 92
propiedades de, 93
función de distribución acumulativa conjunta, 128
función de operación característica, 420
para probar el parámetro P de una variable aleatoria con distribución binomial, 431
para probar la media de una distribución normal con varianza conocida, 424
para probar la media de una distribución normal con varianza desconocida, 433
y elección del tamaño de la muestra, 427
función de regresión, 197
aproximación de los mínimos cuadrados, 201
lineal, 199
función de riesgo, 298
función gama, 254
función generadora de momentos, 276
de una distribución binomial, 278
de una distribución χ^2, 280
de una distribución de Poisson, 278
de una distribución exponencial, 279
de una distribución gama, 280
de una distribución geométrica, 284
de una distribución normal, 279
de una distribución uniforme, 278
de una función lineal de una variable aleatoria, 285

de series de variables aleatorias, 291
de sumas variables aleatorias independientes, 286
de propiedad de unicidad, 285
y momento, 282
funciones de variables aleatorias, 106
caso bidimensional, 137
caso continuo, 111, 112
caso discreto, 108
función monótona, 114
valor esperado de, 161, 168

grandes números, ley de los, 324

hipótesis alternativa, 418
hipótesis, prueba de, 418
para la media de una variable aleatoria con distribución normal, 424
nivel de significación, 425
región crítica, 428
hipótesis nula 418

integral de convolución, 340
intervalo de confianza, 401
para el parámetro de una distribución binomial, 407
para la media de una distribución normal (varianza conocida), 401
para la media de una distribución normal (varianza desconocida), 404
para la varianza de una distribución normal, 408

jacobiano de una transformación, 139, 140

máximo de la muestra, 391
mecánica, analogía con, 77, 88, 159, 177, 180
mínimo de la muestra, 355, 358
y la distribución exponencial, 360
modelos matemáticos, 1
momento de una variable aleatoria respecto de su esperanza, 179
muestra, tamaño de, 421
muestra aleatoria de una variable aleatoria, 351
generación de una muestra aleatoria, 365, 368
muestras, 349
coeficiente de correlación, 400
máximo de, 355
media de, 355
mínimo de, 355
varianza de, 355, 363

números aleatorios, 364

orden estadístico, 355

parámetro de una distribución, 153
probabilidad, 17
axioma para, 18
condicional, 46
inducida, 75, 124
teoremas básicos, 18, 19, 20
probabilidad condicional, 43
probabilidad inducida, 75, 109
probabilidad no condicional, 46
proceso de Poisson, 218, 222

aplicaciones de, 222
supuestos de, 219
producto cartesiano, 7
promedio muestral, 356
propiedades reproductivas, 286
de la distribución χ^2, 288
de la distribución normal, 288
de la distribución de Poisson, 288
punto muestral, 355
recorrido de la muestra, 362
regularidad estadística, 17
resultados igualmente probables, 28

series geométricas, 79
suma de variables aleatorias independientes, 339, 345

teorema de Bayes, 51
teorema de multiplicación de probabilidades, 47
generalización de, 66
teorema de binomio, 35
forma generalizada, 36
teorema del límite central, 331, 332, 333, 335
teorema Gauss–Markoff, 399
transformación integral, 363, 364

valor esperado de una variable aleatoria, 153, 155, 158
aproximación para, 182
de la suma de variables aleatorias, 169
de una función de una variable aleatoria, 161, 169
de una función lineal, 170
del producto de variables aleatorias independientes, 171
del valor condicional esperado, 194
propiedades del valor esperado, 169
valor medio de una variable aleatoria, 153
variable aleatoria, 69
continua, 85
discreta, 76
distribución de probabilidad, 77
espacio muestral de, 71
no correlacionada, 190
sucesiones de, 291
variable aleatoria bidimensional, 121
continua, 122
discreta, 122
normal, 261
variable aleatoria continua, 85
variables aleatorias independientes, 134
criterio de, 135
variables aleatorias n-dimensionales, 145
varianza de una variable aleatoria, 175
aproximación a, 182
evaluación de, 177
propiedades de, 179
de la suma de variables aleatorias independientes, 180
varianza muestral, 349
Venn, diagrama de, 6